





Aurelio Muttoni

L'art des structures

Une introduction au fonctionnement des structures en architecture

Presses polytechniques et universitaires romandes

L'art des structures

Aurelio Muttoni

L'art des structures

Une introduction au fonctionnement des structures en architecture

Traduit de l'italien par Pierre-Alain Croset

Les auteurs et l'éditeur remercient l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne pour le soutien apporté à la publication de cet ouvrage.

Parus chez le même éditeur, sous la direction des professeurs René Walther et Manfred A. Hirt:

Introduction à l'analyse des structures
Marc-André Studer et François Frey
Conception des charpentes métalliques
Manfred A. Hirt et Michel Crisinel

TRAITÉ DE GÉNIE CIVIL
Analyse des structures et milieux continus
Vol. 1 *Statique appliquée*, François Frey
Vol. 2 *Mécanique des structures*, François Frey
Vol. 3 *Mécanique des solides*, François Frey
Vol. 5 *Coques*, François Frey et Marc-André Studer
Vol. 6 *Méthode des éléments finis*, François Frey et Jaroslav Jirousek

Mise en page réalisée par Recto Verso, Delley
Imprimé en Suisse par Corbaz SA, Montreux

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, ainsi que d'autres universités et écoles d'ingénieurs francophones. Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes, EPFL – Centre Midi, CH-1015 Lausanne, par e-mail à ppur@epfl.ch, par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

www.ppur.org

Cet ouvrage est la traduction française du livre *Strutture*, Accademia di Architettura, Mendrisio, 2004

Première édition en français
ISBN 2-88074-554-3
© 2004, Presses polytechniques et universitaires romandes,
CH – 1015 Lausanne
Tous droits réservés.
Reproduction, même partielle, sous quelque forme
ou sur quelque support que ce soit, interdite sans l'accord écrit de l'éditeur.

Images de couverture:
- Magasins Généraux à Chiasso, 1924, ing. R. Maillart (cf. p. 113)
- Johnson and Son Company, Administration Building à Racine Wisconsin, 1939, arch. F. L. Wright (cf. p. 208)
- King Fahd Stadium à Riyadh, 1985, arch. I. Fraser, ing. A. Geiger, H. Berger et J. Schlaich (cf. p. 63)
- Projet pour le Théâtre National à Manheim, 1953, arch. M. van der Rohe (cf. p. 132)

Avant-propos

Le thème de la structure constitue depuis toujours un aspect fondamental de la construction. Alors que jusqu'à la Renaissance la statique des constructions se basait uniquement sur l'expérience, sur l'intuition, sur l'expérimentation avec des maquettes et sur des règles empiriques, la Révolution industrielle a transformé cette discipline en une véritable matière scientifique et technologique. A partir de la seconde moitié du XVIIIe siècle les structures peuvent être calculées, leur comportement mécanique peut être prévu analytiquement, leur forme la plus efficace peut être établie au moyen d'instruments mathématiques et les dimensions nécessaires pour garantir leur résistance et leur stabilité peuvent être déterminées en comparant les efforts à la résistance des matériaux. Les développements technologiques et les nouveaux matériaux qui se sont imposés durant la Révolution industrielle, ainsi que la science des constructions ont favorisé le développement d'une grande variété de nouvelles solutions structurelles. Cette phase historique a produit une spécialisation des rôles, et le constructeur a été remplacé par deux figures professionnelles: l'architecte et l'ingénieur.
Pour l'ingénieur, ce qui était nécessaire au commencement de cette nouvelle ère et qui avait permis une extraordinaire évolution créative démontra toutefois ses limites dans le temps. L'analyse structurale et le calcul sont devenus toujours plus précis et détaillés, le dimensionnement poussé à l'extrême limite a permis des structures toujours plus hardies et efficaces, mais tout ceci s'est malheureusement produit au détriment de la conception structurale, avec un lent et inexorable affaiblissement de la composante créative. Pour l'architecte aussi, la séparation des disciplines n'a pas apporté que des avantages. La difficulté toujours croissante de comprendre le fonctionnement des structures a certainement représenté un appauvrissement.
On a tenté ces dernières décennies de remédier à cette situation. La solution n'est certainement pas de retourner au passé. La séparation des professions, née d'une réelle nécessité, doit être considérée comme irréversible. Pour résoudre les problèmes toujours plus complexes auxquels nous sommes confrontés, la seule voie à suivre consiste en un dialogue et une collaboration entre les diverses figures professionnelles.
Pour savoir collaborer et pour pouvoir projeter ensemble, il est indispensable d'avoir des intérêts communs, d'utiliser le même langage et surtout de se comprendre réciproquement. Ce livre sur les structures en architecture désire contribuer à établir ces conditions premières.

Concrètement, il s'agit d'aider à comprendre le fonctionnement des structures portantes, c'est-à-dire dans la pratique comment les charges sont reprises et transmises jusqu'au sol. Ce livre se base par conséquent sur la compréhension du fonctionnement des structures: c'est également dans ce but que l'étude des charges agissantes, la détermination des forces et l'analyse des efforts internes sont exposés. Pour atteindre plus facilement ce but nous avons privilégié une approche intuitive. Les bases de l'équilibre et le fonctionnement structural sont expliqués en se référant à l'expérience de tous les jours. De ce point de vue, l'équilibre du corps humain que nous avons expérimenté dès nos premiers pas représente un bon exemple. La méthode suivie dans ce livre est en effet fort différente de la méthode conventionnelle qui se base sur la dérivation logico-déductive des lois de la mécanique, de la statique et de la science de la résistance des matériaux. Par ailleurs, nous utiliserons les instruments de la statique graphique pour réduire au maximum l'utilisation du calcul analytique.

Ce livre est le résultat d'un cours élaboré spécifiquement pour l'Académie d'architecture de Mendrisio au moment de sa création en 1996, qui représentait une tentative de développer une véritable statique pour architectes au lieu d'une simplification de la statique classique conçue pour les ingénieurs. Pour l'architecte, la compréhension du fonctionnement structural a comme finalité le projet des structures. Concrètement, il s'agit d'apprendre à choisir une typologie structurale efficace et les matériaux les plus appropriés, à déterminer une forme statiquement correcte, à comprendre quelles zones sont les plus sollicitées et à développer les détails constructifs de façon optimale. Le calcul des sollicitations et le dimensionnement sont traités uniquement dans leurs aspects les plus importants, de façon à faciliter le dialogue avec les ingénieurs.

A mon avis, ces thèmes devraient intéresser également les ingénieurs. Leur formation est encore fortement influencée par l'approche développée dans les écoles fondées à la fin du XVIII[e] siècle. Comme l'avaient proposé les Encyclopédistes, la science des constructions peut être interprétée comme une application de la mécanique, qui n'est elle-même qu'un chapitre de la physique. Il en résulte un enseignement logico-déductif qui a pour but de fournir les instruments nécessaires pour analyser les sollicitations des structures et pour dimensionner les éléments principaux. Mais, malheureusement, savoir calculer et savoir dimensionner ne signifient pas nécessairement comprendre le fonctionnement et savoir

concevoir une structure. L'approche proposée dans ce livre peut donc représenter un nécessaire complément à l'enseignement classique.

Je remercie mes assistants de l'Académie d'Architecture, Stefano Guandalini, Paolo De Giorgi, Andrea Pedrazzini et Patrizia Pasinelli qui m'ont accompagné à partir des premiers cours jusqu'à la rédaction de ce livre. Mes remerciements vont aussi en particulier à Aurelio Galfetti, directeur de l'Académie, qui m'a invité à transformer en un véritable livre les cours polycopiés distribués aux étudiants, à Jacques Gubler pour ses conseils, et surtout à Fabio Minazzi, responsable de l'activité éditoriale de l'école, pour son aide précieuse.

Dès octobre 2003, ce cours a été enseigné aux étudiants d'architecture, génie civil et ingénierie de l'environnement de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Il s'agit, à mon avis, d'une contribution importante à la facilitation de la collaboration et du dialogue entre les figures professionnelles qui participent à l'acte de construire.

C'est dans ce cadre qu'il a été décidé de traduire cet ouvrage en français. Je tiens à remercier chaleureusement le Professeur Pierre-Alain Croset pour sa traduction passionnée, Monsieur Olivier Babel, directeur des Presses polytechniques et universitaires romandes, Monsieur Christophe Borlat, responsable de production, et le Docteur Olivier Burdet, mon précieux collaborateur, pour leur soutien qui a grandement facilité ma tâche.

Aurelio Muttoni

Sommaire



Introduction

Toute la matière de ce livre est organisée selon un parcours précis qui commence par les forces, les charges et les conditions nécessaires pour que les forces qui agissent dans la même direction soient en équilibre. Ensuite, les structures formées par des éléments simples sollicités uniquement à la compression (colonnes), ou uniquement à la traction (câbles) sont abordées. Avec ces exemples, nous pourrons ainsi définir les concepts qui permettent de comprendre comment une structure doit être dimensionnée: la sollicitation, la résistance, la déformation et la rigidité. Au moyen d'exemples simples (un homme qui s'appuie à une paroi ou qui s'agrippe à une corde), nous examinerons les conditions d'équilibre des forces qui agissent dans le plan et dans l'espace.

Nous examinerons ensuite les structures plus complexes sollicitées à la traction (câbles dans le plan, réseaux de câbles et membranes dans l'espace). Pour ces structures, nous étudierons les problèmes relatifs à la déformabilité et les solutions qui permettent d'en augmenter la rigidité.

Dans le chapitre suivant nous traiterons de structures fort semblables, mais sollicitées uniquement à la compression (arcs dans le plan, voûtes et coupoles, mais aussi coques dans l'espace). Nous analyserons d'autre part la problématique de la stabilité des arcs et nous discuterons les différentes solutions à ce problème.

Les structures sollicitées à la traction seront par la suite combinées avec les structures sollicitées à la compression, de façon à obtenir des structures dans lesquelles la poussée des arcs et la traction des câbles se compensent réciproquement. En ajoutant d'autres barres, de façon à stabiliser la structure, nous obtiendrons les treillis, aussi bien dans le plan que dans l'espace. Le pas suivant consiste à remplacer les barres des treillis par des zones étendues de matériau sollicitées à la traction et à la compression. On obtient ainsi des structures avec un fonctionnement fort semblable à celui des treillis, mais avec des formes très différentes puisque nous serons en présence des poutres. En composant les poutres dans l'espace nous traiterons les grilles de poutres, alors qu'en distribuant ensuite la matière nous obtiendrons les dalles.

En particulier, nous analyserons le fonctionnement des poutres à portée réduite par rapport à la hauteur (poutres-cloisons et voiles), en discutant les analogies et les différences par rapport aux poutres élancées.

Nous examinerons aussi les cadres, qui peuvent être interprétés comme la composition de certains éléments déjà traités: colonnes, poutres et arcs.

Le parcours des structures

Traction et compression Structures funiculaires à poussée compensée	Treillis	Poutres	Cadres	Elements comprimés et stabilité
Funicular catenario				
p. 107	pp. 115/149	pp. 155/197	pp. 179/191	p. 211
	Treillis dans l'espace	Grilles de poutres et dalles	Poutres-cloisons et voiles	

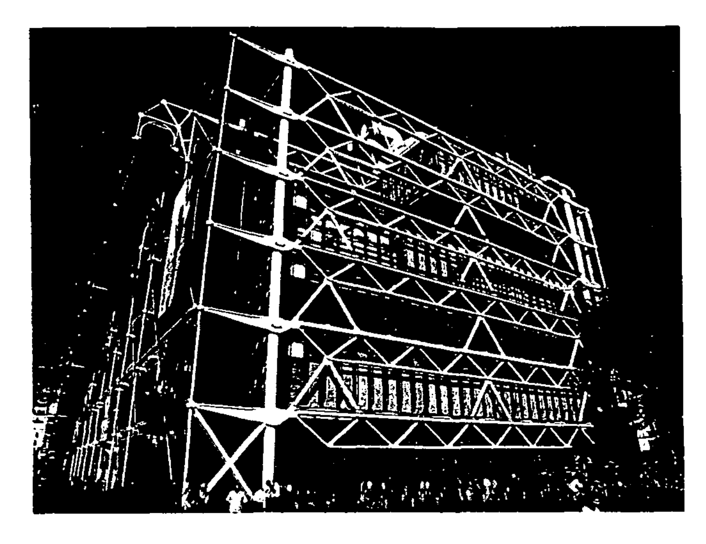
Le parcours des structures fonctionne aussi comme table des matières conceptuelle. L'emploi du terme «parcours» entend souligner la continuité du traitement des matières.
On constate que le fonctionnement de toutes les structures, des plus simples aux plus complexes, peut être décrit en mettant en évidence les zones sollicitées à la traction (représentées par un trait continu) ou à la compression (représentées par un traitillé).

Nous traiterons pour finir les poutres sollicitées par une forte compression dans le sens longitudinal (barres comprimées et fléchies): celles-ci seront étudiées avec une attention particulière quant au phénomène d'instabilité élastique qui dérive de l'interaction entre sollicitation et déformation.

Qu'est-ce qu'une structure portante?

Le terme structure a divers sens. De notre point de vue, ce qui est important est représenté par les éléments constituant l'ossature, le châssis d'une construction. Pour être encore plus précis, nous parlerons de *structure portante*. Par ce terme, nous désignerons l'ensemble des éléments qui exercent une fonction de soutien, dans le domaine du bâtiment et dans d'autres domaines analogues de la construction.

Si on observe n'importe quel bâtiment de l'extérieur ou de l'intérieur, il est relativement facile de reconnaître au moins une partie de la structure portante. Dans l'exemple ci-contre, la structure est évidente, et nous pouvons facilement distinguer une série d'éléments structuraux. Nous voyons par exemple des colonnes verticales qui ont pour but de transmettre les charges dans le terrain, une série de treillis horizontaux qui soutiennent les étages du bâtiment et qui transmettent les charges aux colonnes, des barres disposées en X et des barres de liaison entre les treillis qui servent à stabiliser la construction et à absorber les poussées horizontales provoquées par le vent et par les tremblements de terre, des consoles fixées aux colonnes et reliées à d'autres barres verticales dont nous comprendrons la fonction plus tard, ainsi que d'autres éléments structuraux moins évidents. Si nous observons le bâtiment avec plus d'attention, nous reconnaissons en effet les poutres verticales qui rigidifient la façade et qui absorbent la poussée du vent, un système de barres auquel sont suspendus les escaliers roulants, et les poutres qui constituent la structure de ces escaliers roulants : tous ces éléments font partie de la structure secondaire. Nous pouvons à ce stade nous demander: qu'est-ce qui ne fait pas partie de la structure? Par exemple, les conduits d'aération que nous voyons sur le toit, même s'ils auront eux aussi une structure en mesure de soutenir leur poids propre et de résister à la poussée du vent.



Centre Georges Pompidou à Paris, 1977, arch. R. Piano et R. Rogers, ing. P. Rice (bureau Ove Arup)

Le but d'une structure

Le but d'une structure est lié à son usage et à sa fonction architecturale. En simplifiant, nous pouvons définir au moins trois buts principaux pour une structure:

- elle peut servir à clore, couvrir ou protéger un espace;
- elle peut créer une surface utile pour d'autres fins (par exemple un plancher, une structure qui soutient un parking, un pont sur lequel passe une route);
- elle peut résister à des charges ou soutenir quelque chose (un mur de soutènement qui résiste à la poussée de la terre; un pylône qui porte une ligne à haute tension; une chaise, une table).

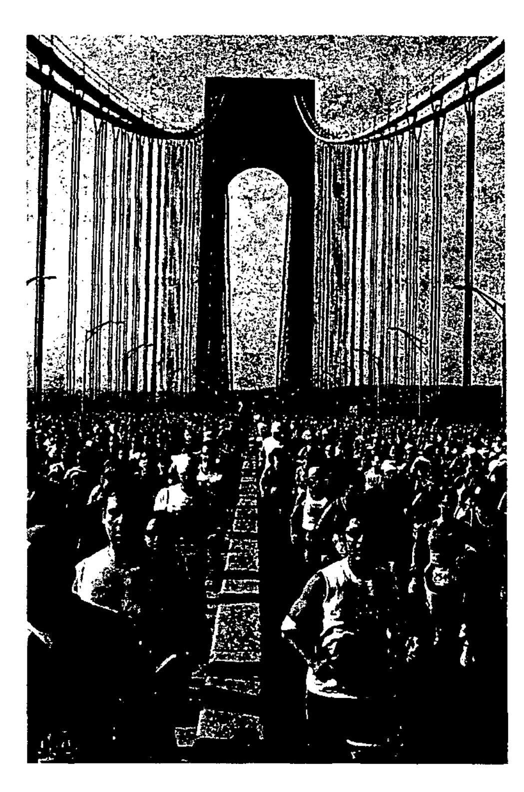
La fonction de soutien et la capacité de résister à des charges ne constituent donc pas nécessairement le but premier d'une structure. Toutes les structures possèdent toutefois, inévitablement, une masse. Par conséquent, la capacité d'une structure de «porter» son propre poids constitue une caractéristique constante et déterminante.

Forces et équilibre, efforts, résistance et rigidité

Les charges qui agissent sur une structure

On définit comme *charges* les forces externes qui agissent sur une structure. Si nous considérons l'exemple ci-contre, nous constatons que les charges peuvent être distribuées essentiellement selon quatre groupes:

1. les charges permanentes (c'est-à-dire le poids propre des structures et des éléments non structuraux qui ne varient pas dans le temps);
2. les charges variables (c'est-à-dire le poids des personnes, des meubles, de la neige, etc.);
3. la poussée du vent;
4. les forces d'inertie dérivant des accélérations de masse (par exemple les tremblements de terre, les chocs, l'action dynamique des personnes qui marchent ou des véhicules qui roulent, etc.).



Verrazzano Narrows Bridge, 1964, ing. Othmar H. Amman (ℓ = 320 + 1298 + 320 = 2038 m). Même dans le cas ici représenté, les charges variables sont petites par rapport aux charges permanentes

Les forces de gravitation et la loi de gravitation de Newton

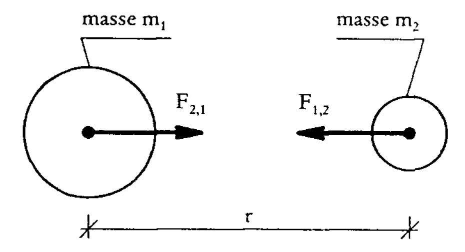
Pour le moment, nous nous limiterons à considérer les forces des deux premiers groupes qui, du point de vue de la physique, sont des *forces de gravitation.*

Une personne, une chaise, une table ou une partie de la structure (une quelconque masse) subissent l'attraction de la terre. En d'autres termes, une masse posée sur la surface de la terre est sujette, avant tout, à la force de gravitation exercée par la terre. Nous savons d'autre part que la terre subit à son tour une force de gravitation exercée par les masses qui se trouvent sur sa surface, par exemple par une personne. La terre et la personne peuvent en effet être considérées comme deux masses qui s'attirent réciproquement. Selon la *loi de gravitation de Newton*, la force que la terre exerce sur la personne a la même intensité que la force exercée par la personne sur la terre: elle est proportionnelle au produit des deux masses, et inversement proportionnelle au carré de leur distance.

Cette relation peut être décrite par l'équation suivante:

$$F_{2,1} = F_{1,2} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$F_{2,1}$ est la force que m_2 exerce sur m_1.
$F_{1,2}$ est la force que m_1 exerce sur m_2.
r est la distance entre les deux masses.
G est la constante de gravitation universelle, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$



Forces de gravitation entre deux masses m_1 et m_2 distantes de r

Comme toutes les forces, la *force de gravitation* peut être quantifiée en Newton.

Cette unité de mesure est équivalente à un kilogramme multiplié par un mètre et divisé par une seconde au carré: 1 Newton = 1 N = 1 kg · m/s²

La force de gravitation à la surface de la terre

Pour tous les corps posés sur la surface de la terre, étant donné que $m_2 = 5{,}985 \cdot 10^{24}$ kg et r = 6378000 m, on obtient la relation suivante:

$$F_{2,1} = F_{1,2} = m \cdot 9{,}81 \text{ avec les unités } N = kg \cdot m/s^2.$$

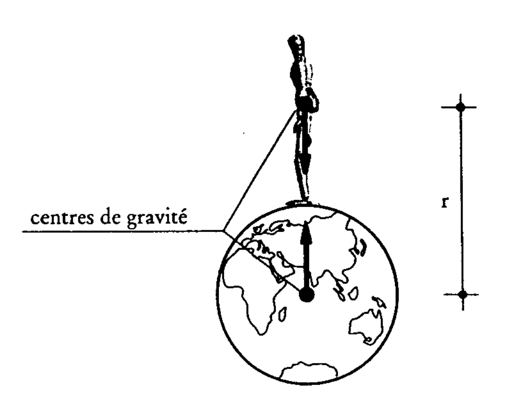
1 kg de masse pèse par conséquent 9,81 N, approximativement 10 N, alors qu'une personne avec une masse de 70 kg pèse 687 N, environ 700 N soit 0,7 kN.
Il faut noter que même au sommet de l'Everest, le poids de la même personne restera fort semblable, car la distance depuis le centre de la terre n'augmente pas sensiblement:
avec r ≅ 6378000 + 8800 on obtient une force de gravitation

$$F_{2,1} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 70 \cdot 5{,}958 \cdot 10^{24}/6\,386\,800^2 = 685 \text{ N}.$$

Si nous comparons cette force aux 687 N que nous avons obtenus en calculant la force qui agit sur la même personne au niveau de la mer, nous constatons que la variation est minime. D'autres différences de la même importance, presque négligeables, s'observent si l'on se déplace sur la surface terrestre à une altitude constante. Ces effets sont causés par la forme non parfaitement sphérique de la terre et par la répartition non constante de la densité.
La même personne a en revanche un poids très différent si elle se rend sur une autre planète. Par exemple sur la lune, une personne de 70 kg subit une force de gravitation de:

$$F_{2,1} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 70 \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}/1\,738\,800^2 = 114 \text{ N}$$

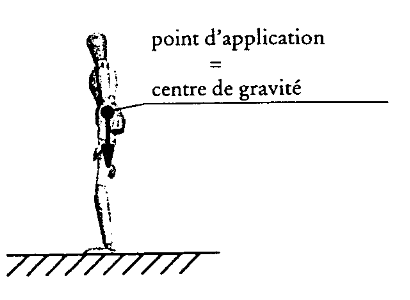
équivalente à environ un sixième de la force que la même personne subit sur la terre. C'est pourquoi un astronaute qui tente de marcher sur la surface de la lune ne peut pas s'empêcher de sauter.



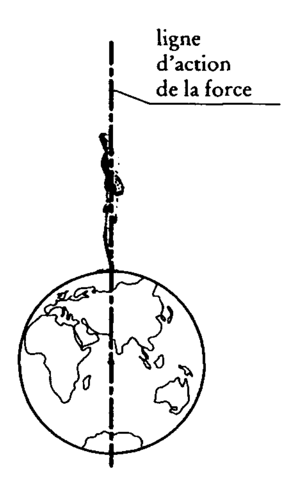
Forces de gravitation qui s'exercent entre la terre et une personne posée sur la surface terrestre

Le vecteur force, le point d'application et la ligne d'action

Les forces que nous avons examinées précédemment possèdent toutes *un point d'application*. Celui-ci coïncide avec le centre de gravité (appelé aussi centre de masse). Nous verrons par la suite comment déterminer le centre de gravité d'un corps quelconque.
La force peut être représentée comme un vecteur défini par son point d'application, par sa direction, par son sens et par son intensité (grandeur). Si nous devons représenter plusieurs



Centre de gravité et vecteur qui représente la force-poids exercée par la terre sur la personne

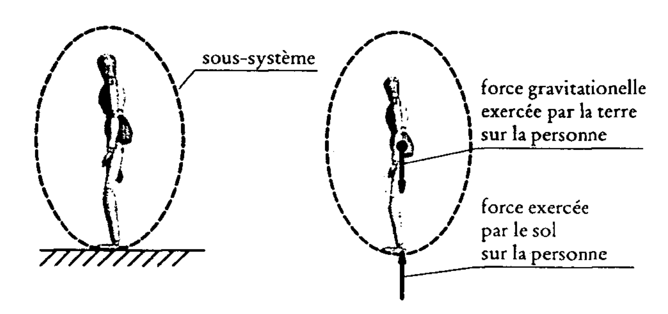


Ligne d'action de la force-poids

forces, nous dessinerons la longueur de leurs vecteurs de façon proportionnelle à l'intensité de la force.
Le point d'application et la direction définissent la *ligne d'action d'une force* (ou *ligne de force*). Dans le cas des forces de gravitation, la ligne d'action relie les deux centres de gravité (celui de la personne et celui de la terre).
Cependant, une personne posée sur la surface de la terre ou sur le plancher ne subit pas que la force de gravitation de la terre qui l'attire vers le bas. Par expérience, nous savons que le plancher joue un rôle fondamental, et nous savons bien ce qui peut se passer quand le plancher cède sous nos pieds ! En effet, ce dernier joue une fonction «active» dans le fait de soutenir une personne, en exerçant une force vers le haut.

Le sous-système

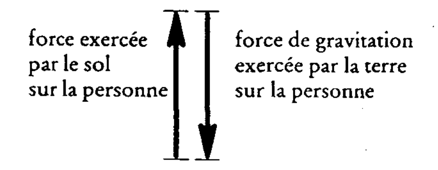
Pour pouvoir représenter cette force, nous devons isoler la personne du reste du système terre-personne. Par la suite, nous appellerons *sous-système* précisément cette partie du système que nous avons isolée avec toutes les forces qui agissent.



Sous-système personne et forces agissantes

Les conditions d'équilibre de deux forces

Nous pouvons facilement imaginer quelles sont les conditions nécessaires afin que les deux forces qui agissent sur la personne soient en équilibre. Elles doivent:
1. être de même intensité;
2. agir dans la même direction, mais en sens opposé;
3. être placées sur la même ligne d'action.



Comparaison des forces agissant sur le sous-système

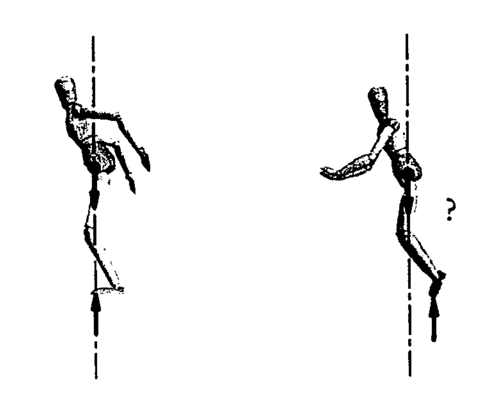
Les deux premières conditions peuvent être résumées en une condition équivalente: les deux forces doivent s'annuler vectoriellement.
En effet, la personne pourra rester immobile sur le plancher seulement si les forces s'annullent en déterminant une condition d'équilibre.
Pour vérifier ce que signifie la condition selon laquelle les deux forces doivent agir sur la même ligne d'action, nous pouvons essayer de nous pencher en avant avec notre corps, de façon que la ligne d'action de la force de gravitation, qui passe par le centre de gravité, se déplace en avant jusqu'à la pointe de nos pieds. De cette façon, nous aurons obtenu un équilibre précaire.

Si nous déplacons encore en avant la ligne d'action de la force de gravité, celle-ci ne passe plus par la plante des pieds, ce qui cause notre chute. En effet, la force que le plancher exerce sur nous doit agir sur la surface de contact entre les pieds et le plancher; si les deux forces ne peuvent plus être placées sur la même ligne d'action, alors l'équilibre ne sera plus possible et, par conséquent, nous tomberons en avant.

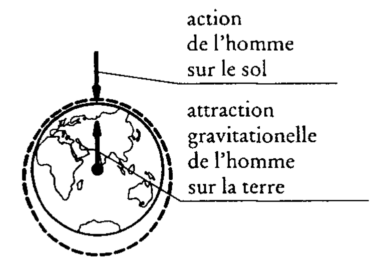
En réalité, dans ce cas aussi l'équilibre des forces est encore possible, à condition toutefois d'introduire une force d'inertie en mesure de décrire l'accélération de notre corps qui tombe. Cette approche, qui implique la dynamique des corps, ne sera pas approfondie dans ce livre.

Pour analyser les forces qui agissent sur une personne, nous avons isolé le « sous-système personne » du système global (personne + terre). Nous pouvons clairement répéter la même analyse de l'équilibre en considérant le « sous-système terre ». Dans ce cas, nous aurons encore deux forces: la force de gravitation que l'homme exerce sur la terre (vers le haut), et une force que l'homme exerce sur le plancher, c'est-à-dire sur la terre (vers le bas). Les deux forces, pour satisfaire les conditions d'équilibre, doivent avoir la même intensité, comme dans le sous-système analysé précédemment.

Puisque la force de gravitation que l'homme exerce sur la terre (« sous-système terre ») a la même intensité que l'attraction terrestre sur l'homme (« sous-système homme »), les quatre forces qui agissent sur la terre et sur l'homme sont d'égale intensité.



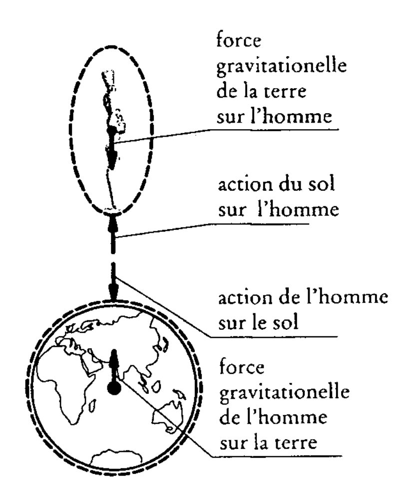
Situation d'équilibre précaire — Situation sans équilibre statique



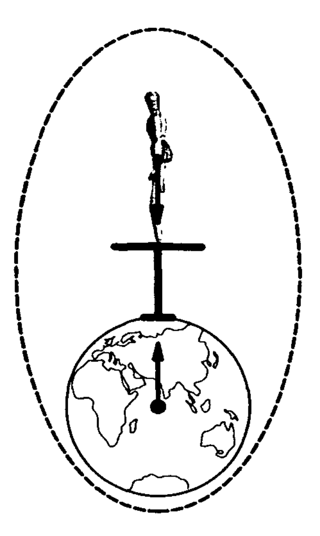
Sous-système terre et forces agissantes

Les forces qui agissent sur la surface de contact entre deux sous-systèmes: action = réaction

Avec l'exemple précédent, nous avons montré comment les forces qui agissent sur la surface de contact entre deux sous-systèmes (l'action du plancher sur la personne et l'action de la personne sur le plancher) doivent avoir la même intensité. Pour décrire cette situation, qui est toujours valable quand on isole des sous-systèmes, il est courant de dire que « l'action correspond à la réaction» (*actio = reactio*, selon l'expression de Newton qui fut le premier à formuler cette équation). Cette règle implique la définition d'un sujet qui exerce l'action et qui subit la réaction, mais elle vaut aussi si l'on échange le sujet et l'objet. Pour éviter de possibles confusions, il est toutefois toujours utile de définir *qui* exerce la force et *sur quoi* il l'exerce (la force de la personne sur le plancher/la force du plancher sur la personne).



Combinaison des deux sous-systèmes avec leurs forces respectives



Personne debout sur une table qui subit la force de gravitation, sous-système personne-table-terre

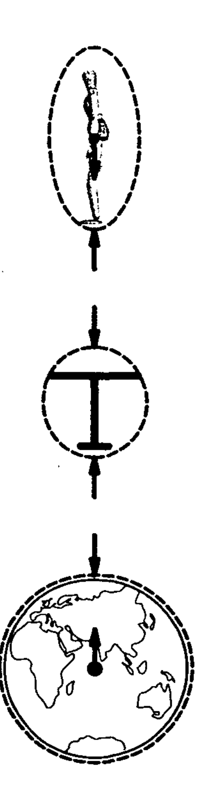
Si nous analysons maintenant le cas d'une personne debout sur une table, et si nous ne considérons pas la masse de la table (négligeable par rapport à celle de la personne), dans le système global représenté par la personne + table + terre, nous aurons les deux mêmes forces que précédemment: la force de gravitation que la terre exerce sur la personne, et la force de gravitation que la personne exerce sur la terre. En revanche, si nous analysons séparément les trois sous-systèmes, soit la personne, la table et la terre (y compris le plancher), nous devrons considérer les forces supplémentaires qui agissent entre les divers sous-systèmes.

Sur la personne agiront, comme expliqué précèdemment, la force de gravitation de la terre et la poussée exercée par la table vers le haut. Sur la table agiront la poussée vers le bas exercée par la personne et la poussée vers le haut exercée par le plancher. Enfin, sur la terre agiront la poussée vers le bas exercée par la table et la force de gravitation exercée par la personne vers le haut. Ces six forces devront clairement elles aussi avoir la même intensité et agir sur la même ligne d'action pour pouvoir être en équilibre.

Si nous considérons maintenant la table comme une structure, la *charge* agissante correspond à la poussée vers le bas exercée par la personne. Comme nous avons vu, cette force a la même intensité et la même ligne d'action que la force gravitationnelle exercée sur la personne (poids de la personne).

La transmission d'une force

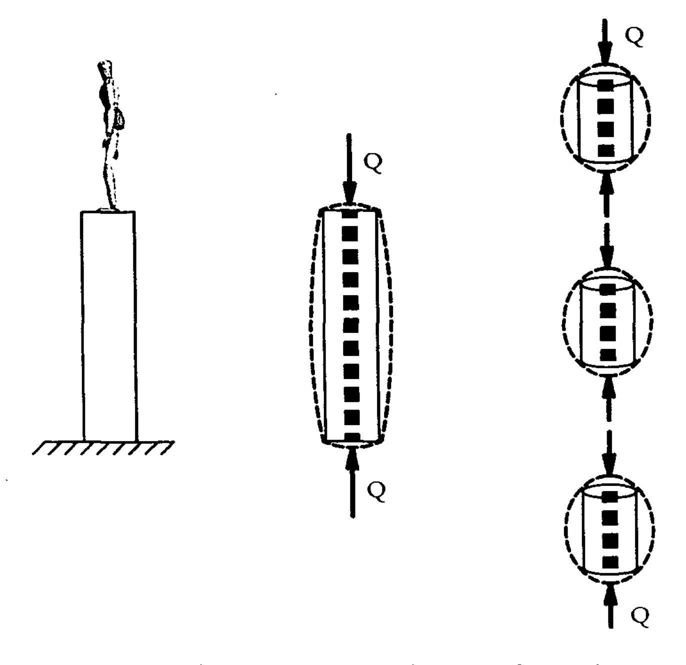
Sur la table, bien qu'aucune force de gravitation ne s'exerce (sa masse a été négligée), agissent les deux forces exercées par la personne et par le plancher. Nous pouvons interpréter cette situation comme une transmission de la force de la personne à la terre et vice-versa. En utilisant une autre terminologie, nous pouvons affirmer que la table est sollicitée par la personne et par le plancher, ou bien qu'elle est comprimée (écrasée) entre la personne et le plancher.



Les trois sous-systèmes avec leurs forces respectives

La sollicitation de compression et l'effort de compression

Pour mieux comprendre la signification de la sollicitation, analysons un autre exemple fort semblable. Remplaçons la table par une colonne, elle aussi de masse négligeable par rapport à celle de l'homme. Dans ce cas aussi, si nous considérons le «sous-système colonne», nous nous rendons compte qu'il existe une transmission des forces à travers la colonne, et que celle-ci est sollicitée *à la compression.* Nous pouvons obtenir d'autres sous-systèmes à partir de la même colonne, en la découpant par exemple en trois tronçons. Toutes les forces impliquées devront avoir la même intensité. En d'autres termes, chacun des trois tronçons sera sujet à la même sollicitation de compression, indépendamment de sa longueur et de sa section.



Personne sur la colonne, sous-système colonne avec forces agissantes, sous-systèmes de trois tronçons de la colonne

La quantification de l'effort

Nous pouvons définir quantitativement la *sollicitation de compression* (ou *effort de compression*) présente à l'intérieur de la colonne en reportant simplement la force que la colonne transmet d'une extrémité à l'autre (dans notre cas la force de gravitation que la terre exerce sur l'homme et vice-versa):

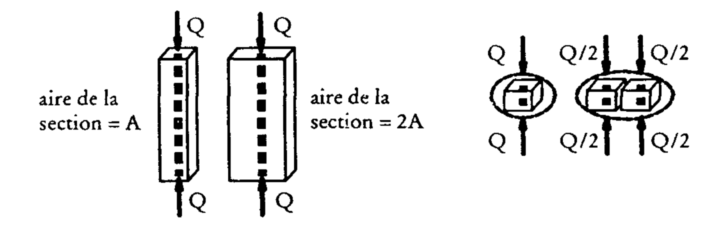
$N = -Q$ mesuré en Newton ou bien en kN

où N est l'effort et Q la charge qui agit sur la colonne. Par convention, il est courant de définir l'effort de compression comme négatif.

La sollicitation du matériau: la contrainte de compression

Nous avons vu que l'effort transmis par la colonne est indépendant de sa section. Naturellement, ceci n'est valable que si le poids de la colonne est négligé. Nous pouvons toutefois facilement imaginer que la section de la colonne influence le degré de sollicitation du matériau. Pour expliquer ce concept, considérons l'exemple suivant.

Dans les deux colonnes représentées ci-contre, celle de droite a une section double par rapport à celle de gauche. Comme nous l'avons vu, l'effort est indépendant de la longueur de la colonne et de sa section. Dans les deux colonnes, l'effort est donc identique. Il est toutefois évident que si nous découpons dans les deux colonnes des portions de matériau avec les mêmes dimensions (par exemple en découpant verticalement la colonne de droite), les deux portions de cette colonne subiront une sollicitation égale à la moitié de celle que subit la colonne de gauche (dans ce cas nous avons fait l'hypothèse que la ligne d'action de l'effort correspond à la ligne du centre de gravité de la colonne). Pour prendre en compte le fait que la sollicitation effective du matériau, par opposition à la sollicitation de la colonne, dépend non seulement de l'effort

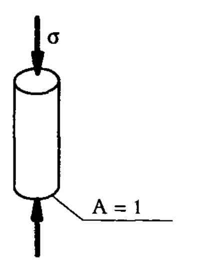


Deux colonnes avec une section différente soumises à la même force, sous-systèmes de tronçons de colonne

de compression, mais aussi de l'aire de la section, on calcule habituellement l'effort par unité de surface:

$\sigma = N/A$ mesurée en N/mm^2

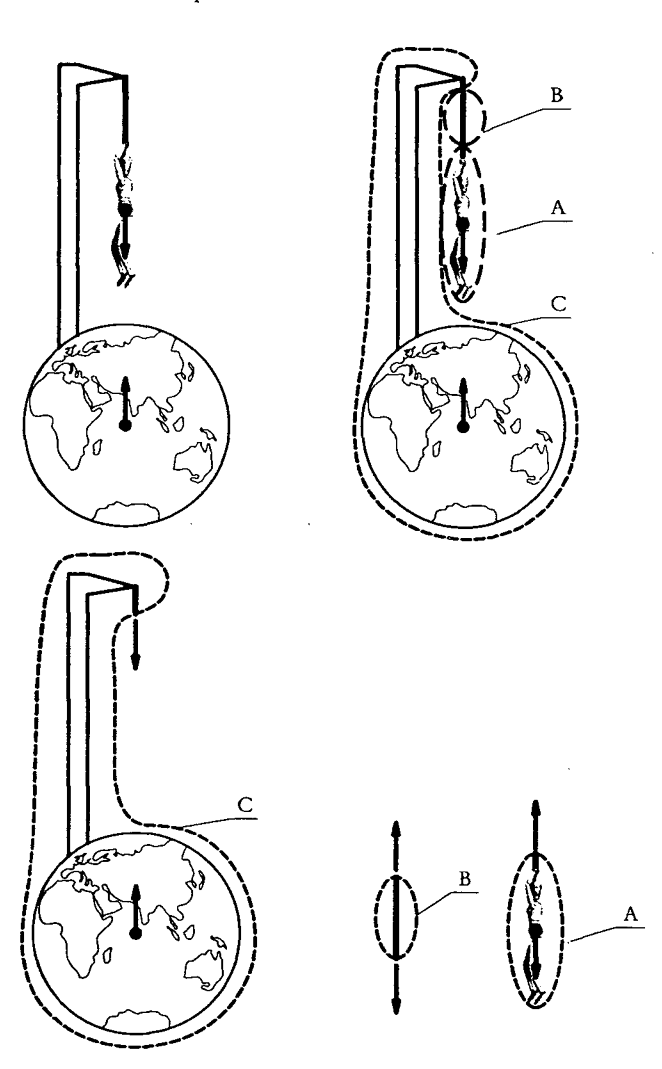
où N est l'effort et A est l'aire de la section transversale.
Cet effort par unité de surface est appelé *contrainte* (dans ce cas présent *contrainte de compression*) et définit la sollicitation du matériau. Puisque l'effort N présente un signe négatif (–), σ aussi sera négatif. Il ne faut toutefois pas accorder trop d'importance à ce signe négatif: il s'agit d'une pure convention, utile pour distinguer la contrainte de compression des autres types de contraintes.



Contrainte de compression

La sollicitation de traction

Analysons maintenant un autre exemple. Imaginons la même personne, qui était précédemment montée sur la colonne, qui grimpe à une corde fixée à un support. Si nous analysons les forces agissant sur le système global composé par personne + corde + structure de support + terre, et si nous faisons l'hypothèse que la masse, et donc aussi le poids, de la corde et de la structure de soutien sont négligeables par rapport à celle de la personne (et donc aussi par rapport à celle de la terre), nous nous rendons tout de suite compte que cette situation est analogue à celle de la personne sur la colonne. Dans ce cas, nous sommes encore une fois en présence de la force de gravitation que la personne exerce sur la terre, et de la force de gravitation que la terre exerce sur la personne. Si nous voulons analyser ce qui se passe à l'intérieur de la corde, nous devons isoler des sous-systèmes, de façon analogue à ce que nous avons fait avec la colonne.
Nous pouvons isoler par exemple une partie de la corde (sous-système B). Il reste deux autres sous-systèmes: la personne avec un bout de corde dans ses mains (sous-système A) et la terre avec la structure portante et un autre bout de corde (sous-système C). Nous pouvons commencer l'analyse par exemple avec le sous-système A. Nous savons que sur la personne agit la force de gravitation exercée par la terre (700 N vers le bas). Pour garantir l'équilibre de la personne, nous devons introduire une autre force qui devra agir là où nous avons coupé le sous-système. Il s'agit d'une force qui agit à l'intérieur de la corde et que nous appellerons également dans ce cas *effort*. Si nous considérons le sous-système A comme un objet, nous pouvons affirmer qu'il s'agit d'une force que la corde (sujet) exerce sur le sous-système (objet).
Si la corde est suffisamment flexible, la ligne d'action de ces forces devra coïncider avec l'axe de la corde. Comme nous

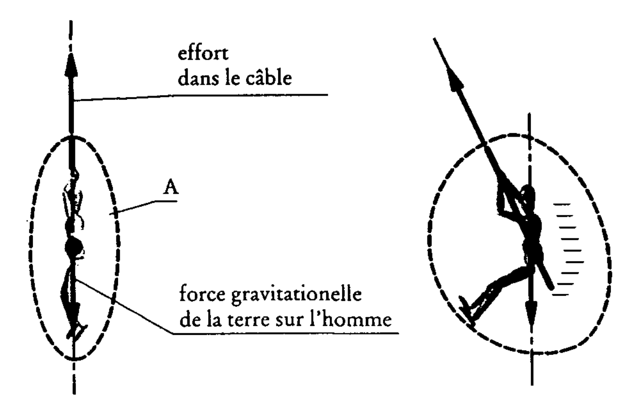


Personne suspendue à une corde, définition des sous-systèmes

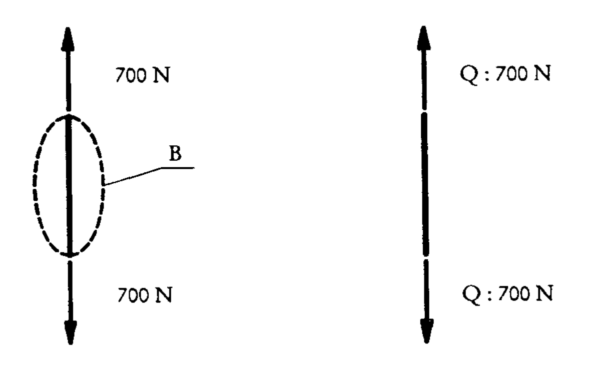
l'avons déjà vu, les deux forces qui agissent sur le sous-système, pour être en équilibre, doivent agir en sens inverse, avoir la même intensité (700 N) et agir le long de la même ligne d'action. Cette dernière condition exige donc que l'axe de la corde coïncide avec la ligne d'action de la force de gravitation.
Nous pouvons maintenant imaginer un autre exemple, dans lequel les deux lignes d'action ne coïncident pas du fait que la corde n'est pas verticale. Chacun de nous a déjà vécu cette situation, par exemple sur une balançoire. Une personne se balance en se comportant comme un pendule. Si nous considérons seulement les deux forces dont nous avons parlé, le sous-système n'est bien sûr pas en équilibre. Pour rétablir l'équilibre des forces, il faudrait en effet considérer l'effet dynamique et introduire en plus une force d'inertie.
Revenons maintenant à notre exemple statique avec la personne au repos. Si nous passons au sous-système B, nous constatons qu'il subit la même force, du haut vers le bas, de la part du sous-système A. Puisque nous négligeons le poids propre de la corde, une seule autre force agit sur le sous-système B: celle exercée par le sous-système C qui agit là où nous avons séparé les deux sous-systèmes. Dans ce cas aussi, les conditions d'équilibre sont claires. Cette force doit s'exercer vers le haut, avec une intensité de 700 N, et doit agir le long de la même ligne d'action que la force exercée par le sous-système A sur le sous-système B. Dans ce cas aussi, la ligne d'action doit correspondre à l'axe de la corde. Si nous analysons le bout de corde que nous avons isolé avec le sous-système B, nous constatons que les deux forces agissantes le maintiennent en tension. En d'autres termes, nous sommes en présence d'une sollicitation de traction, et la corde transmet cet effort de la personne à la structure de soutien.
Comme dans la colonne sollicitée à la compression, dans ce cas aussi nous pouvons définir quantitativement la *sollicitation de traction* (ou *effort de traction*) en indiquant simplement la force qui est transmise d'une extrémité à l'autre:

$N = Q$ mesuré en Newton ou bien en kN

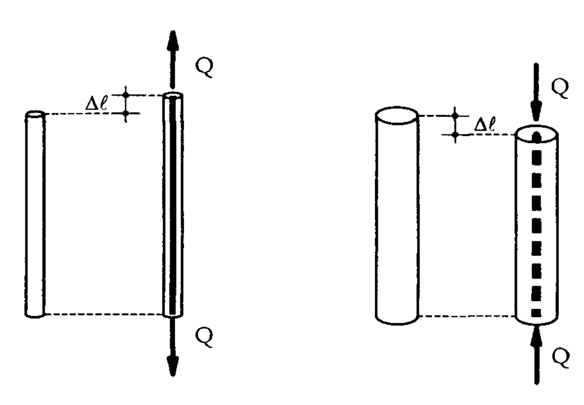
où N est l'effort et Q la charge soutenue par la corde. Par convention, on définit habituellement l'effort de traction comme positif. Le signe + ou – sert donc à distinguer l'effort de traction positif de l'effort de compression négatif.



Sous-système personne et forces agissantes, situation statique et situation dynamique



Sous-système corde et forces agissantes



Allongement et raccourcissement

La contrainte de traction

Il faut observer que la sollicitation N indique l'intensité de la sollicitation de la corde, mais que cette valeur seule ne fournit aucune information sur la sollicitation effective du matériau. Pour obtenir cette donnée, nous devons diviser la sollicitation par l'aire effective de la section de la corde:

$\sigma = N/A$ mesurée en N/mm^2,

où N est l'effort mesuré en Newton et A l'aire de la section mesurée en mm^2.
Pour cette valeur, définie comme contrainte de traction, nous avons la même expression que nous avions introduite pour exprimer la sollicitation du matériau comprimé de la colonne. Les contraintes σ seront distinguées par leur signe: positif pour la traction et négatif pour la compression.

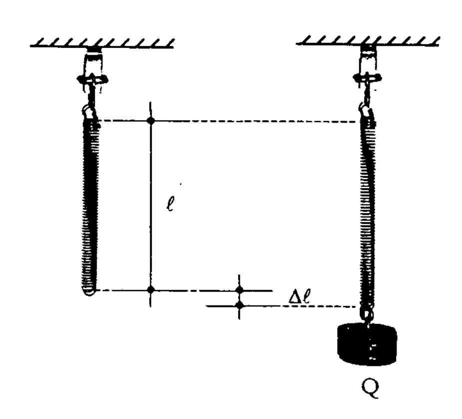
L'effet de la sollicitation de traction: allongement

Considérons maintenant l'effet de l'effort de traction sur la corde. L'expérience nous enseigne que toute sollicitation de traction a comme effet un allongement de l'élément.

L'effet de la sollicitation de compression: raccourcissement

De façon analogue, un élément sollicité à la compression tend à se raccourcir.
Si ces affirmations triviales ne nous suffisent pas, nous pouvons nous demander *de combien* s'allonge la corde et *de combien* se raccourcit la colonne. D'autre part, nous pouvons tenter de comprendre quels facteurs influencent ces déformations (d'allongement et de raccourcissement):

- la sollicitation joue clairement un rôle fondamental: plus son intensité est grande, plus la déformation sera importante;
- le type de matériau est également important: il suffit de comparer une corde en acier et un élastique (avec les mêmes dimensions et une même sollicitation);
- les dimensions aussi (aire de la section et longueur) influencent sûrement les déformations.



Ressort en acier sollicité par une force-poids Q

Pour quantifier ces influences, procédons à une expérience. Sollicitons à la traction un ressort en acier, par exemple en suspendant un poids Q, et mesurons l'allongement $\Delta\ell$.

Le comportement linéaire et le comportement élastique

En augmentant l'effort N, qui dans notre cas correspond à la charge Q, l'allongement $\Delta\ell$ augmente également. Plus précisément, si nous doublons la sollicitation, nous obtiendrons un allongement double. Ce qui signifie que si nous reportons ces valeurs dans un diagramme, nous obtenons une ligne droite. En d'autres termes, nous sommes en présence d'un *comportement linéaire*. Comme nous le verrons par la suite, ceci ne vaut pas nécessairement pour tous les matériaux, ou tout au moins, ne vaut pas pour toute sollicitation appliquée à n'importe quel matériau.
Si nous détachons le poids, annulant ainsi la sollicitation, nous retournerons au point de départ avec $\Delta\ell = 0$. Dans ce cas, nous sommes donc en présence d'un comportement parfaitement réversible. Nous parlons dans ces situations de *comportement élastique*.

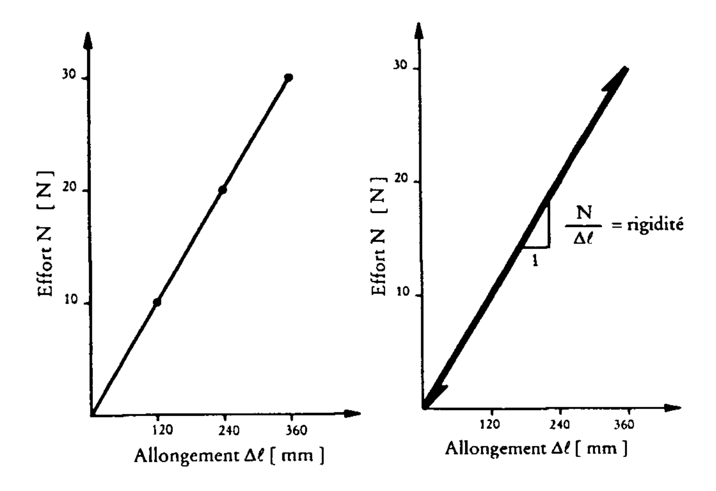
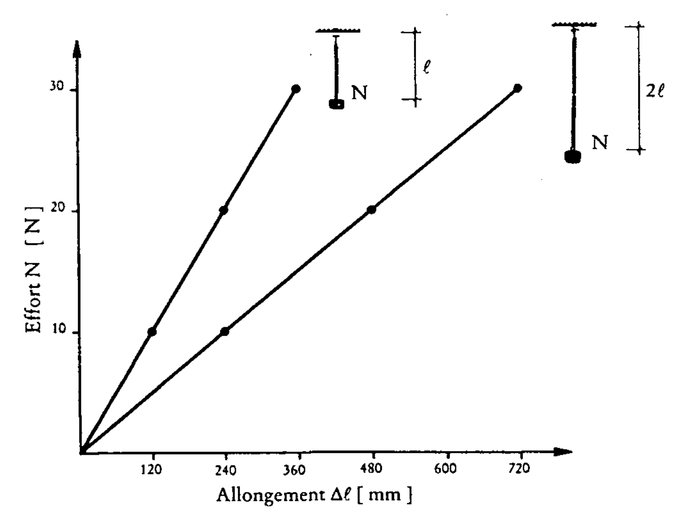


Diagramme effort-allongement, comportement linéaire

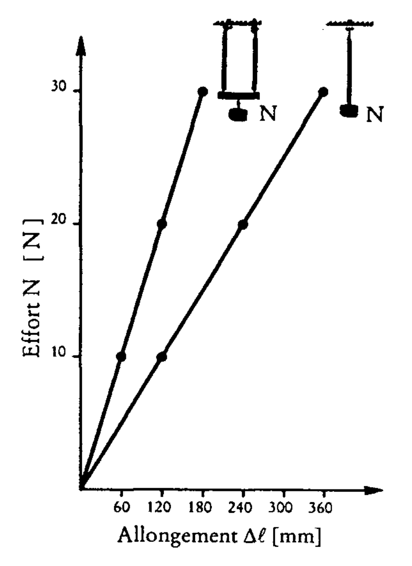
Comportement élastique et rigidité

La rigidité

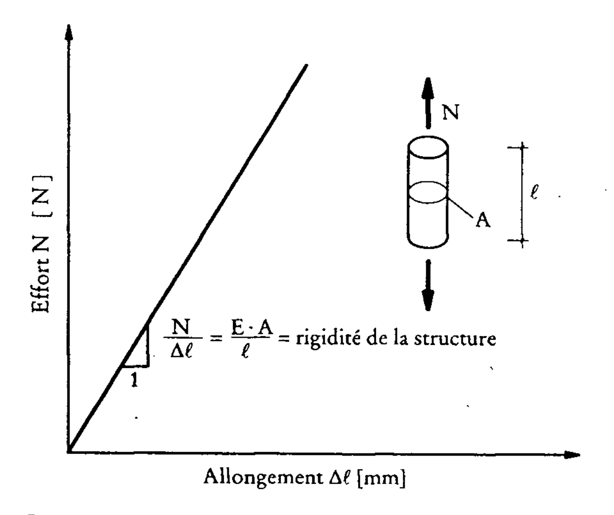
Si le comportement est linéaire et réversible, un seul paramètre est donc suffisant pour définir quantitativement la relation effort-allongement. Cette valeur, qui représente la pente de la droite dans le diagramme N ($\Delta\ell$), est définie comme la *rigidité* et correspond au rapport $N/\Delta\ell$.
Essayons maintenant de doubler la longueur du ressort en lui ajoutant un autre avec les mêmes caractéristiques. A l'aide de sous-systèmes appropriés, nous pouvons facilement démontrer que les deux ressorts subissent la même sollicitation, comme dans le cas d'un seul ressort que nous venons d'analyser. Dans ce cas, nous devrons toutefois additionner les allongements de chaque ressort, et nous obtiendrons par conséquent un allongement double et une rigidité diminuée de moitié par rapport au cas du ressort unique. En généralisant, nous pouvons affirmer que la *rigidité est inversement proportionnelle à la longueur* ℓ.



Influence de la longueur



Influence de l'aire de la section



Comportement mécanique de la structure

Pour simuler l'influence de l'aire de la section, nous pouvons disposer deux ressorts en parallèle. Dans ce cas, on obtient une situation semblable à un doublement de l'aire A de la section de notre élément. Chacun des deux ressorts sera clairement sollicité par la moitié de la sollicitation totale N, et par conséquent l'allongement $\Delta\ell$ sera lui aussi diminué de moitié par rapport au cas du ressort unique. La rigidité du système est doublée, et nous pouvons donc affirmer que *la rigidité est directement proportionnelle à l'aire de la section* A.

La rigidité d'une structure sollicitée à la traction ou à la compression

En résumé: la rigidité d'une structure simple sollicitée à la traction peut être définie par le rapport entre la sollicitation N et l'allongement $\Delta\ell$. La rigidité dépend du matériau, elle est directement proportionnelle à l'aire A de la section et inversement proportionnelle à la longueur ℓ. En introduisant une constante qui définit la rigidité du matériau (E, appelé *module d'élasticité*) nous pouvons définir la loi suivante:

$$\frac{N}{\Delta\ell} = \frac{E \cdot A}{\ell}$$

L'expression est valable aussi pour une structure sollicitée à la compression. Dans ce cas, N et $\Delta\ell$ (le raccourcissement) seront négatifs.

La rigidité du matériau

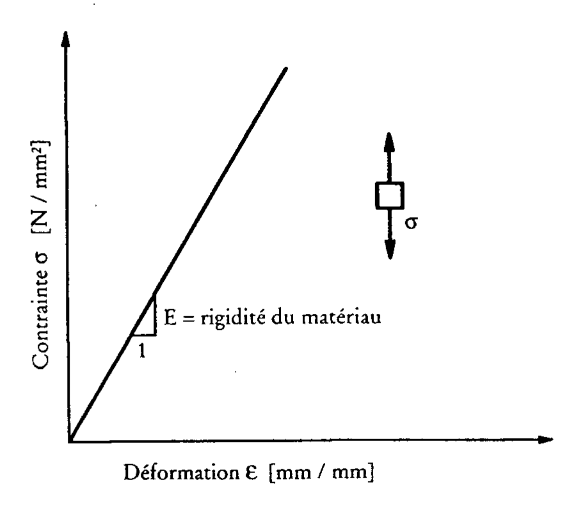
L'équation que nous venons de définir peut être transformée en portant $\Delta\ell$ au numérateur et A au dénominateur, de façon à obtenir

$$\frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

Comme nous l'avons déjà vu, le premier terme, appelé contrainte σ, correspond à la sollicitation spécifique du matériau.
Si nous définissons $\Delta\ell/\ell$ comme la déformation unitaire ε (déformation par unité de longueur), nous obtiendrons alors la loi suivante:

$\sigma = E \cdot \varepsilon$ ou bien $\sigma/\varepsilon = E$

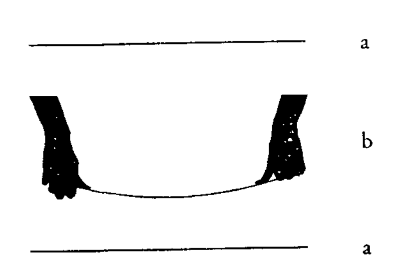
La seconde expression définit la rigidité du matériau (le module d'élasticité) comme le rapport entre la sollicitation spécifique (contrainte σ) et la déformation unitaire ε.
Cette expression, qui se réfère au matériau, est fort semblable à celle qui définit la rigidité de la structure. Leurs représentations graphiques sont également semblables.
Nous pouvons remarquer que dans le diagramme qui se réfère à la structure, si on change l'aire de la section et la longueur, on obtiendra naturellement diverses droites. En revanche, ces paramètres sont absents dans le diagramme qui se réfère au matériau.



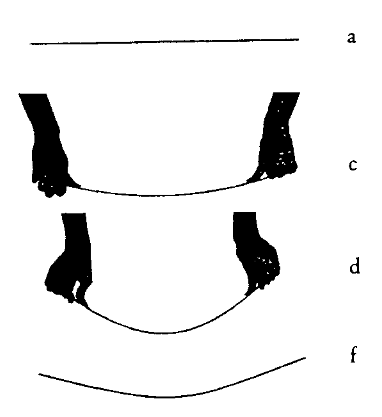
Comportement mécanique du matériau

La phase élastique et la phase plastique

L'expérience nous enseigne que si l'on sollicite les matériaux au-delà d'une certaine limite, leur comportement n'est plus élastique (c'est-à-dire réversible).
Si nous plions un fil de fer sans atteindre cette limite, en supprimant la sollicitation le fil de fer retrouvera sa forme initiale. Si, en revanche, nous dépassons cette limite, nous provoquerons alors une déformation irréversible. Si nous supprimons de nouveau la sollicitation, le fil tendra à revenir à la forme initiale, sans pour autant la retrouver complètement. Nous verrons par la suite comment les sollicitations à la traction à l'intérieur du fil de fer plié sont accompagnées par une compression (phénomène de la flexion). Pour le moment, il est toutefois suffisant de savoir qu'un comportement identique se vérifie aussi bien dans un élément sollicité uniquement à la traction que dans un élément seulement comprimé.



Fil de fer sollicité dans la phase élastique



Fil de fer sollicité au-delà de la phase élastique, déformation irréversible, phase plastique

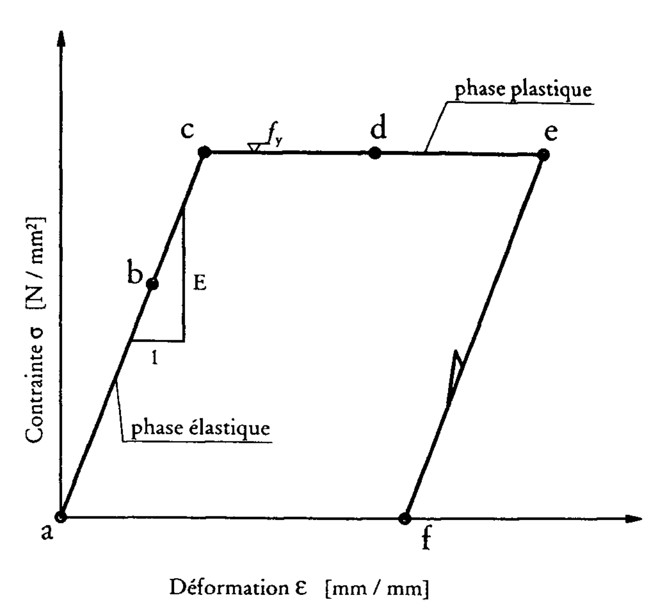
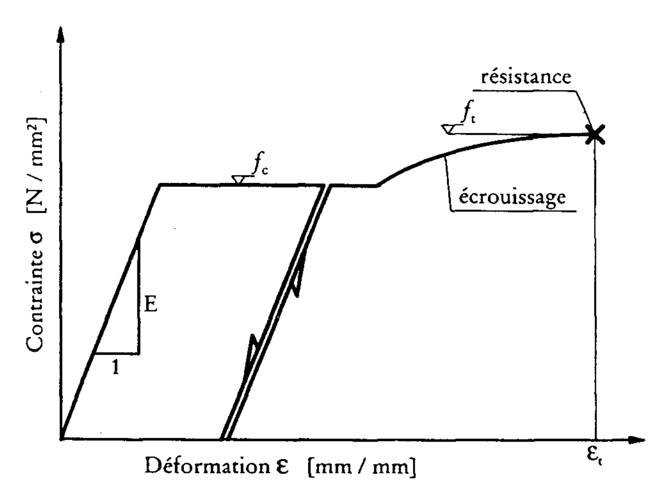


Diagramme contrainte-déformation, phase élastique et phase plastique



Comportement mécanique de l'acier

Si nous représentons la contrainte (σ) et la déformation (ε) dans un diagramme, nous obtenons un tracé d'ensemble dans lequel à chaque phase correspond un segment de ligne droite. Dans la phase c-d-e de la déformation irréversible, nous avons une sollicitation constante (segment horizontal dans le diagramme). Cette phase est appelée *phase plastique*. La phase e-f, durant laquelle la sollicitation diminue, est caractérisée elle aussi par un tracé linéaire, dans lequel la pente est identique à celle de la première phase élastique a-b-c. Nous avons par conséquent le même module d'élasticité E. Bien que le matériau ait déjà subi une déformation plastique, si nous le sollicitons à nouveau, nous parcourrons de nouveau la ligne f-e jusqu'à atteindre la limite élastique, au-delà de laquelle se produiront d'autres déformations plastiques (irréversibles).

La contrainte d'écoulement et la résistance

Pour le fer, l'acier et tous les matériaux avec des caractéristiques similaires, cette limite est appelée *contrainte d'écoulement* f_y.
Si nous déformons encore le matériau, nous atteindrons une déformation au-delà de laquelle la sollicitation commencera de nouveau à augmenter. Cette phase est appelée *écrouissage*. A un certain point, on atteindra la *résistance* du matériau f_t. Il se formera alors une fissure qui traversera tout le matériau, et il se produira finalement une rupture par détachement.

Le comportement mécanique de l'acier

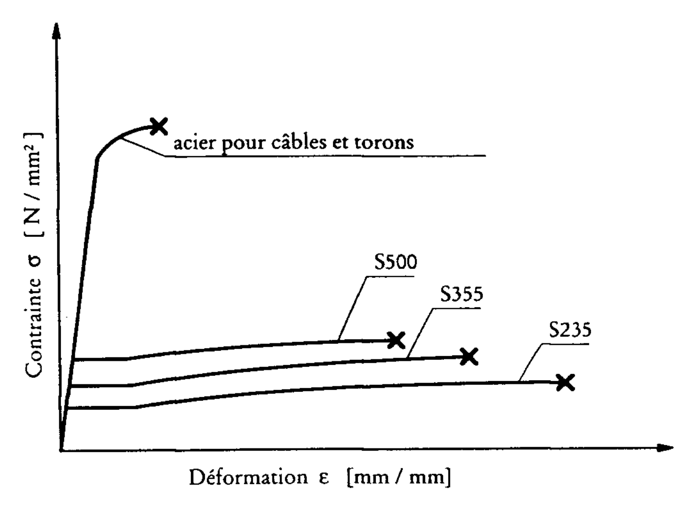
Le comportement de l'acier, qui est caractérisé dans le diagramme contrainte-déformation par deux segments linéaires (phase élastique et phase plastique) et par une courbe (phase de l'écrouissage), peut être défini quantitativement par quatre paramètres: module d'élasticité E, contrainte d'écoulement f_y, résistance à la rupture f_t, et déformation à la rupture ε_t.

Le module d'élasticité E

Le module d'élasticité E est constant pour tous les types d'acier et a une valeur de E = 210000 N/mm².

La contrainte d'écoulement f_y

La contrainte d'écoulement f_y (limite élastique) dépend en revanche du type d'acier. Elle varie d'un minimum de 235 N/mm² pour l'acier utilisé habituellement dans les constructions métalliques (que nous appellerons donc S235), à un maximum d'environ 3000 N/mm² pour le matériau des cordes de piano (acier harmonique). Il faut remarquer que l'acier harmonique ne présente pas de véritable phase plastique avec contrainte d'écoulement constante. Dans ces cas, on définit habituellement comme contrainte d'écoulement f_y la contrainte qui correspond à une déformation plastique de 0,002 mm/mm (2 mm/m). Entre ces extrêmes, on trouve l'acier à haute résistance, utilisé dans les constructions métalliques (f_y = 355 N/mm², S355), l'acier d'armature, utilisé comme renfort dans le béton armé (f_y = 500 N/mm², S500), et l'acier harmonique utilisé pour les câbles et les torons des structures haubanées et des câbles de précontrainte utilisés dans le béton armé précontraint (f_y = 1410 – 1670 N/mm²).



Diagrammes contrainte-déformation pour quatre types d'acier sollicités à la traction

La résistance à la rupture f_t

La résistance à la rupture f_t est toujours supérieure à la contrainte d'écoulement et correspond à la contrainte maximale atteinte juste avant la rupture.

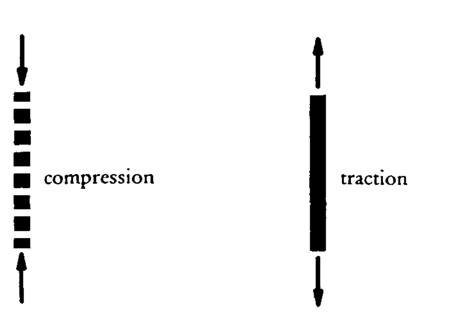
La déformation à la rupture ε_t

La déformation à la rupture ε_t peut atteindre des valeurs très élevées. Puisque, dans une structure, des déformations aussi importantes pourraient être problématiques, on tient compte habituellement dans le dimensionnement uniquement de la phase plastique avec la contrainte d'écoulement f_y, et on néglige l'augmentation de la sollicitation qui se produit lors de l'écrouissage. C'est pouquoi on décrit habituellement le type d'acier en définissant sa contrainte d'écoulement. Il est intéressant de remarquer l'ordre de grandeur des déformations de rupture. Pour l'acier S 235, employé habituellement dans les constructions métalliques, on atteint la rupture pour un allongement qui correspond à un cinquième de la longueur originale.

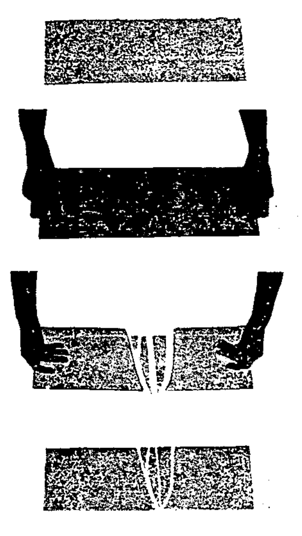
Type d'acier	E N/mm²	f_y N/mm²	f_t	ε_t
S 235	210000	235 *	360 *	0,210 *
S 355	210000	355 *	510 *	0,170 *
S 500	210000	500 *	580 *	0,140 *
acier pour câbles et torons	160000÷ 195000**	1410÷ 1670 *	1570÷ 1860 *	0,050 *

* valeurs minimales
** valeurs réduites pour tenir compte de l'effet des fils tressés

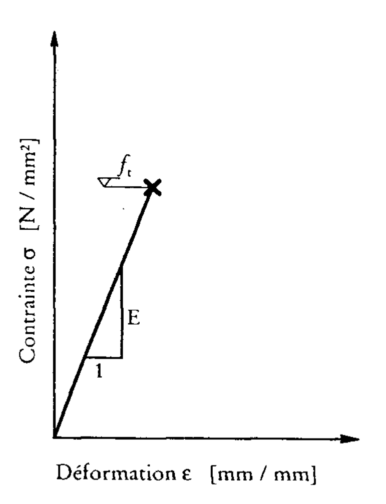
Valeurs mécaniques des quatre types d'acier les plus communs.



Représentation graphique de la compression et de la traction



Echantillon de verre peu sollicité et sollicitation jusqu'à la rupture



Comportement mécanique du verre sollicité à la traction ou à la compression

La traction et la compression

Il faut observer que les mêmes valeurs du module d'élasticité E et des contraintes d'écoulement f_y sont obtenues en sollicitant l'acier aussi bien à la traction qu'à la compression.
La modalité de transmission des efforts de traction et de compression à l'intérieur du matériau est toutefois passablement différente. Un élément en acier ou en un quelconque autre matériau est en mesure de résister à la compression, même s'il est subdivisé en éléments qui transmettent les efforts par simple contact. La représentation par une ligne traitillée que nous avons choisie pour la compression évoque métaphoriquement cette situation (comme si les traits singuliers indiquaient des petites tranches de matériau comprimé).
Dans le cas de la sollicitation de traction, le matériau, pour pouvoir résister à l'effort, doit être continu, ou pour le moins assemblé par un autre matériau résistant à la traction (colle). C'est pourquoi nous utiliserons par la suite une ligne continue pour représenter l'effort de traction.
L'exemple d'une chaîne qui transmet un effort de traction peut à première vue contredire ce qui vient d'être affirmé. En réalité, les anneaux de la chaîne, bien que sollicités surtout à la traction, présentent un jeu compliqué de zones sollicitées à la compression et à la traction. Dans la zone où les anneaux transmettent la sollicitation aux anneaux adjacents par simple contact, ils sont sollicités uniquement à la compression.

La fragilité et la ductilité

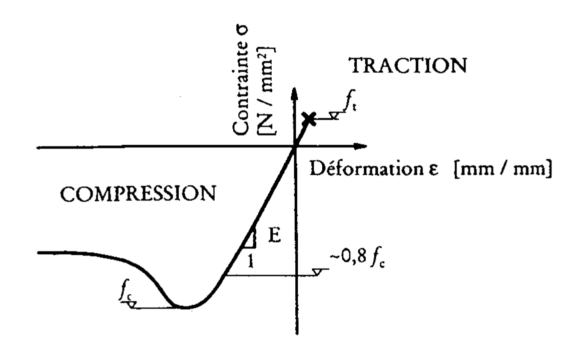
Essayons maintenant de solliciter un échantillon en verre de façon analogue à ce que nous avions fait avec le fil de fer. En présence de faibles sollicitations, le verre se déformera avec un comportement linéaire-élastique. Nous savons toutefois parfaitement ce qui se passe quand nous augmentons la sollicitation jusqu'à atteindre la limite de rupture: l'échantillon se casse en deux parties. Dans ce cas aussi, nous avons donc une sollicitation de rupture, appelée *résistance du matériau* f_r.
La différence de comportement par rapport à l'acier est toutefois évidente: dans le cas du verre, la rupture intervient sans que le matériau ait subi précédemment des déformations plastiques (irréversibles). Ce comportement est défini comme *fragile*.
Les autres matériaux de construction les plus communs ont un comportement qui se situe entre deux extrêmes:
– comportement ductile de l'acier et
– comportement très fragile du verre.

Le béton

Si nous analysons le béton, nous observons que son comportement dépend essentiellement du type de sollicitation. S'il est tendu, le béton a un comportement très fragile, semblable à celui du verre. La rupture se produit alors par détachement, à cause d'une fissure qui se propage perpendiculairement à la direction de la sollicitation. Si le béton est sollicité à la compression, son comportement est en revanche fort différent. Au-delà d'une certaine limite des fissures se forment parallèles à la direction de la sollicitation qui causent une déformation irréversible. La sollicitation peut toutefois être augmentée jusqu'à atteindre la résistance à la compression f_c, au-delà de laquelle la propagation d'autres fissures provoque une réduction de la résistance.
En variant le contenu de ciment, le type d'agrégats, et surtout la quantité d'eau de gâchage, on obtient des bétons de diverses résistances.

La roche

D'un certain point de vue, le béton peut être considéré comme une roche (conglomérat). En effet, de nombreuses roches ont un comportement mécanique semblable à celui du béton. Il existe également une vaste gamme de résistances pour les divers types de roche. En général, les roches sédimentaires (grès, conglomérat et dolomie) ont des résistances et des modules d'élasticité plus bas que ceux des roches métamorphiques et cristallines (marbre, gneiss, granit, basalte, etc.).
Comme pour le béton, le comportement du matériau des roches sollicitées à la compression varie avec la résistance. Le béton et les roches à basse résistance présentent des déformations irréversibles assez importantes, avant et surtout après avoir atteint la résistance à la compression. Pour des matériaux à haute résistance, le comportement peut en revanche devenir très fragile. Au moment d'atteindre la résistance à la compression f_c, d'innombrables fissures se propagent rapidement, provoquant une rupture explosive avec formation d'éclats.

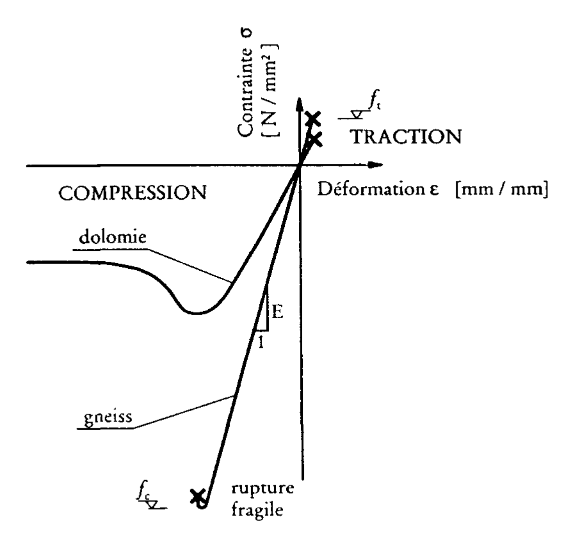


Comportement mécanique du béton

Type de béton	Module d'élasticité E N/mm²	Résistance à la traction f_t N/mm²	Résistance à la compression f_c N/mm²	
Béton à basse résistance	28000÷34000	1,1÷2,0	12 */ 10 **	béton obtenu avec peu de ciment et beaucoup d'eau
Béton habituellement utilisé dans le bâtiment	30000÷36000	1,5÷2,9	20 */ 16 **	béton usuel
Béton pour ponts	34000÷42000	2,2÷4,2	36 */ 29 **	
Béton à haute résistance	37000÷44000	2,9÷5,3	52 */ 42 **	béton obtenu avec beaucoup de ciment et peu d'eau

* valeurs minimales
** valeurs de calcul

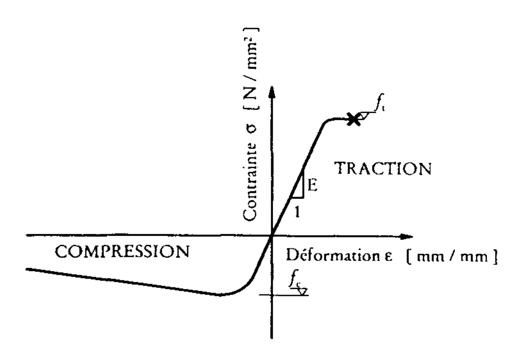
Valeurs mécaniques de quatre types de béton



Comportement mécanique des roches

Type de roche	Module d'élasticité E N/mm²	Résistance à la traction f_t N/mm²	Résistance à la compression f_c N/mm²
Grès	6000÷20000	1÷2	10÷60
Marbre de Carrare	60000÷90000	2÷15	80÷130
Gneiss et granit	20000÷50000	2÷15	80÷180

Valeurs indicatives de certains types de roche



Comportement mécanique du bois sollicité dans le sens longitudinal

Type de bois	Densité kg/m³	Module d'élasticité E N/mm²	Résistance à la traction f_t N/mm²	Résistance à la compression f_c N/mm²
Balsa	80÷200	2500-6000	16-22	8-18
Sapin:				
- sans défaut	400÷500	14000	100	30
- bois de construction		12000	40	20
Hêtre	600÷750	15000	130	50
Chêne	600÷800	16000	140	50

Rigidité et résistance du bois, valeurs indicatives pour sollicitations parallèles au sens de croissance

	acier S500	béton ordinaire	rapport acier/béton
Module d'élasticité E	210000	~ 33000	~ 6: 1
Résistance à la traction f_t	500*	~ 2,5	~ 200: 1
Résistance à la compression f_c	500*	~ 25	~ 20: 1
Déformation à la rupture ε_t	140 mm/m	0,06 mm/m	~ 2000: 1

Caractéristiques de l'acier en comparaison avec celles du béton sollicité à la traction (* limite d'écoulement)

La rupture causée par des sollicitations de traction est en revanche toujours très fragile, et se produit par la formation d'une seule fissure perpendiculaire à la sollicitation (détachement).

Le bois

Le bois, matériau biologique constitué essentiellement de cellulose, nous apparaît comme une véritable structure si nous l'observons au microscope. Il est en effet constitué par des structures tubulaires avec une paroi très fine fort semblable à celle du carton ondulé.
Le comportement mécanique du matériau sollicité dans le sens de la croissance est relativement semblable à celui des autres matériaux structuraux, avec une phase linéaire élastique importante.
Si le bois est sollicité à la traction au-delà d'une certaine limite, les structures de cellulose se déchirent, des fissures se forment et le matériau perd sa résistance. Si le bois est sollicité à la compression, l'écrasement et l'instabilité des fines parois des petits tubes provoquent des déformations irréversibles. Même après avoir atteint la résistance à la compression f_c, le bois peut encore être comprimé et subir une importante déformation plastique avec une perte de résistance limitée.
Les divers types de bois ont également des caractéristiques mécaniques différentes qui dépendent essentiellement de leur densité variable (quantité de cellulose et quantité de vides par rapport au volume total).

Une comparaison des matériaux

Les matériaux structuraux présentent donc de fortes différences dans leurs caractéristiques mécaniques. La comparaison reportée ci-contre entre le béton et l'acier sollicités à la traction met bien en évidence cette situation.

La rigidité et la résistance

Tous les matériaux sont caractérisés par un module d'élasticité E et par une résistance f_t (ou bien f_c). Ces deux caractéristiques peuvent évidemment se rencontrer également dans les structures. Comme nous l'avons déjà vu, au module d'élasticité E du matériau correspond la rigidité EA/ℓ de la structure.

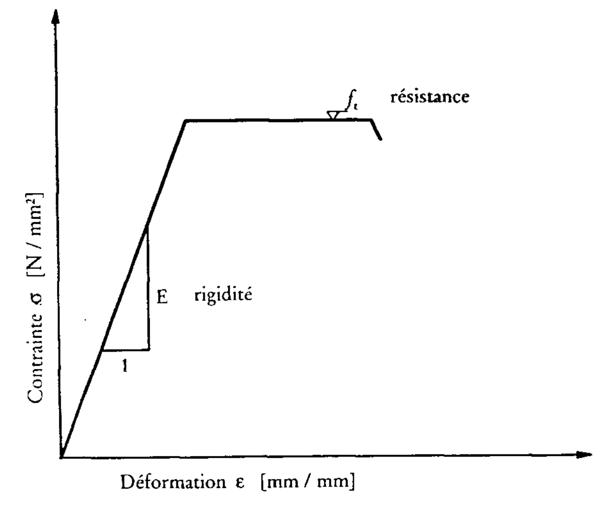
A la résistance du matériau correspond en revanche la capacité portante de la structure. L'effort maximal de traction ou de compression au-delà duquel la structure se brise peut être calculé simplement en multipliant la résistance du matériau par l'aire de la section:

$N_R = f_t \cdot A$ en cas de rupture à la traction ou bien
$N_R = -f_c \cdot A$ en cas de rupture à la compression

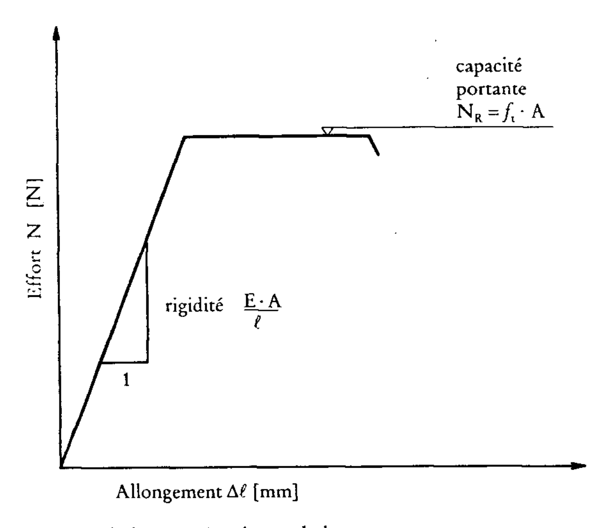
Il faut observer que la capacité portante des structures que nous avons analysées jusque là ne dépend ni de la forme de la section, ni de la longueur de la structure. Comme nous le verrons par la suite, ceci vaut pour les structures sollicitées à la traction et pour les structures comprimées dont l'élancement n'est pas trop grand. Quand l'élancement (déterminé par le rapport entre la longueur et la dimension de la section) dépasse une certaine limite, l'effondrement de la structure ne se produit pas à cause de la rupture du matériau, mais à cause d'un phénomène d'instabilité. Nous reviendrons sur ce problème dans le chapitre consacré à la stabilité.
Avant de continuer, nous aimerions rappeler les deux caractéristiques principales de chaque matériau et de chaque structure:

- la *rigidité* décrit de *combien* un matériau se déforme sous l'effet d'une sollicitation ou une structure sous l'effet d'une charge: plus la rigidité est grande et plus les déformations sont petites;
- la *résistance* décrit *combien* un matériau peut être sollicité ou *combien* une structure peut être chargée avant de se rompre.

Souvent, ces deux termes sont malheureusement confondus dans l'usage commun. Ceci dérive du fait qu'aussi bien la rigidité que la résistance dépendent du type de matériau et des dimensions de la structure. Souvent, une structure rigide est aussi résistante. Nous devons cependant faire attention à cette distinction et utiliser la terminologie correcte, car les exceptions sont vraiment innombrables!



Caractéristiques mécaniques du matériau

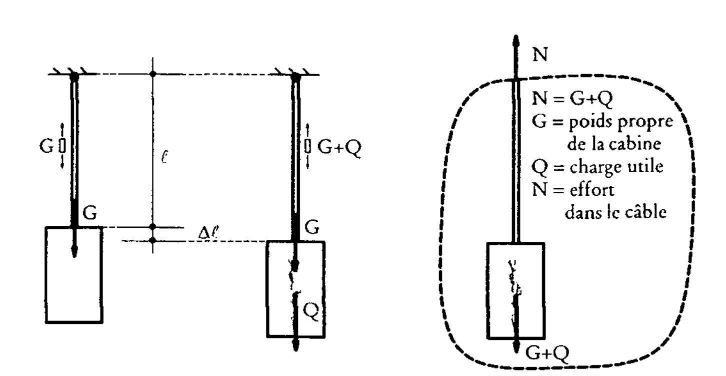


Caractéristiques mécaniques de la structure

Le dimensionnement

Les relations qui lient la géométrie de la structure et les caractéristiques du matériau à la rigidité et à la résistance, nous permettent de déterminer la dimension de l'aire de la section de façon à
- limiter les déformations
- et éviter la rupture

de la structure soumise aux charges prévues. Pour mieux comprendre ce procédé, appelé *dimensionnement*, nous pouvons penser à l'exemple d'un ascenseur dont la cabine est suspendue à des câbles.



La cabine d'un ascenseur avec les câbles de suspension, abaissement de la cabine sous l'effet de la charge utile

Le critère de l'état limite de service

La première condition permet de déterminer l'aire de la section des câbles nécessaire pour que l'allongement $\Delta\ell$ provoqué par le poids des personnes dans l'ascenseur ne dépasse pas une certaine limite $\Delta\ell_{adm.}$ (l'allongement admissible), au-delà de laquelle l'utilisation de l'ascenseur serait problématique et les personnes trébucheraient, ou bien encore l'oscillation causerait des malaises et un sens d'insécurité aux usagers (imaginons une cabine d'ascenseur suspendue à un élastique !).
L'allongement $\Delta\ell$ causé par la variation de l'effort ΔN (correspondant à la charge des voyageurs Q) vaut:

$$\Delta\ell = \Delta N \frac{\ell}{E \cdot A}$$

et doit être inférieur à l'allongement admissible $\Delta\ell_{adm.}$. Avec cette équation, nous pouvons tout de suite déterminer l'aire de la section nécessaire pour garantir une rigidité suffisante de la structure:

$$A_{néc.} \geq \frac{\Delta N}{E} \cdot \frac{\ell}{\Delta\ell_{adm.}}$$

Imaginons par exemple un ascenseur qui peut être chargé avec une masse de 800 kg ($Q = \Delta N \cong 10 \times 800 = 8000$ N), une longueur des câbles égale à 30m, un module d'élasticité $E = 160000$ N/mm² et un allongement admissible de 10 mm (pour ne pas trébucher). Dans ce cas, nous obtenons alors la condition suivante:

$$A_{néc.} \geq \frac{8000 \text{ N}}{160000 \text{ N/mm}^2} \cdot \frac{30000 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 150 \text{ mm}^2$$

Par conséquent, nous devrons utiliser un câble avec un diamètre d'au moins 15mm ($A = 177$ mm²).

La valeur limite $\Delta\ell_{adm.}$ peut être définie selon le type d'ascenseur et selon l'utilisation prévue. Ce critère de dimensionnement se réfère donc à l'état de « service » de la structure. Pour cette raison, on l'appelle *critère de « l'état limite de service »* (SLS, *Serviceability Limit State*).

Le critère de l'état limite ultime

Comme nous l'avons vu, l'autre critère sert pour dimensionner la structure, de façon à éviter la rupture (dans notre cas celle du câble). Il s'agit d'un critère impératif, puisque la rupture doit être évitée à n'importe quel prix (en réalité à un prix raisonnable). Il faudra par exemple tenir compte de tous les cas possibles d'utilisation les plus défavorables (plus précisément jusqu'à une limite avec une probabilité raisonnablement petite). Bien que la charge admissible soit toujours clairement spécifiée (max. 8 personnes, ou bien max. 800 kg), nous savons que cette limite peut être parfois dépassée. La rupture doit clairement être évitée, même dans ce cas.

Les facteurs de charge

C'est pourquoi il faudra tenir compte dans le dimensionnement d'une charge majorée, obtenue en multipliant la charge prévue par un facteur appelé facteur de charge γ_Q. En réalité, l'ascenseur peut lui aussi être légèrement plus lourd que la charge prévue. C'est pourquoi il faudra considérer un poids propre obtenu en multipliant le poids nominal par un facteur γ_G.
Les facteurs de charge sont définis par les normes techniques. Le tableau ci-contre reporte, de façon indicative, les valeurs prévues par les normes européennes. D'autres normes fournissent des valeurs semblables.

Charges permanentes	$\gamma_G = 1{,}35$
Charges variables Poussée du vent	$\gamma_Q = 1{,}5$

Facteurs par lesquels les charges doivent être majorées

Les charges majorées et l'effort de dimensionnement

Le dimensionnement de la structure s'effectuera donc en considérant la somme de toutes les charges majorées possibles. L'effort que l'on obtient sous l'effet de ces charges est appelé *effort de dimensionnement*:

$$N_d = \gamma_G \cdot G + \gamma_Q \cdot Q$$

Les facteurs de résistance

Pour être suffisamment prudents, nous devons d'autre part considérer que la résistance du matériau et l'aire de la section peuvent être légèrement inférieures par rapport aux prévisions. En effet, quand une structure est projetée, les caractéristiques exactes du matériau qui sera employé dans la construction ne sont pas encore parfaitement connues. C'est pourquoi la capacité portante de la structure doit être réduite par rapport à la capacité nominale, en divisant la résistance nominale du matériau par un autre coefficient de sécurité qui dépend du type de matériau choisi.

acier	$\gamma_M = 1,1$
acier d'armature	$\gamma_M = 1,15$
béton	$\gamma_M = 1,5$
bois	$\gamma_M = 1,5 - 1,7$
maçonnerie	$\gamma_M = 2,0$

Facteurs de sécurité par lesquels les résistances du matériau doivent être réduites

De cette façon, on tiendra compte d'une variabilité plus ou moins grande de la résistance. L'acier, grâce à sa fabrication constamment contrôlée, possède en effet une variation des résistances beaucoup plus petite que celle du bois (qui présente souvent des nœuds, des fissures de retrait et diverses autres imperfections), du béton ou de la maçonnerie.
Les valeurs reportées ci-contre se réfèrent aux matériaux de construction. Pour des structures sujettes à l'usure, comme dans le cas du câble de l'ascenseur, on adoptera des facteurs bien supérieurs.

La résistance de dimensionnement

Avec la résistance de dimensionnement du matériau $f_d = f/\gamma_M$, on obtient ainsi la résistance de dimensionnement de l'élément de structure:

$$N_{Rd} = f_d \cdot A$$

En comparant cette dernière avec l'effort de dimensionnement, qui doit toujours être plus petit ($N_d \leq N_{Rd}$), on obtient l'aire nécessaire de la section en divisant l'effort de dimensionnement N_d par la résistance de dimensionnement f_d:

$$A_{\text{néc.}} \geq \frac{|N_d|}{f_d}$$

Ce critère de dimensionnement est appelé *critère de « l'état limite ultime »* (ULS, *Ultimate Limit State*).
Dans le cas de notre ascenseur, en faisant l'hypothèse d'un poids propre G = 9000 N (masse de 900 kg), nous obtiendrons un effort de dimensionnement $N_d = 1,35 \times 9000 + 1,5 \times 8000 = 24\,150$ N.
Avec une résistance de matériau $f_y = 1410$ N/mm² et un facteur de résistance $\gamma_M = 6$ (à cause du danger d'usure), nous obtenons une résistance de dimensionnement

$$f_d = \frac{1410}{6} = 235 \text{ N / mm}^2$$

et une aire nécessaire du câble

$$A_{\text{néc.}} = \frac{24150}{235} = 103 \text{ mm}^2$$

Dans ce cas, c'est donc le critère de l'état limite de service ($A_{\text{néc.}} = 150$ mm²) et non le critère de l'état limite ultime qui

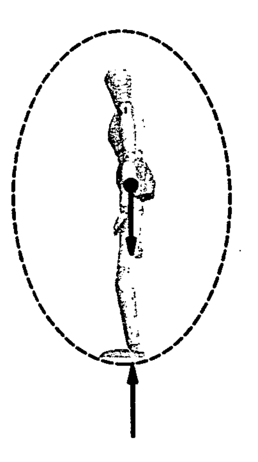
est déterminant. Si, en revanche, nous avions toléré un abaissement de la cabine de 20 mm, le critère de l'état limite ultime contrôlerait, et dans ce cas un câble de 12 mm de diamètre ($A = 113\ mm^2 > A_{néc.}$) serait suffisant.

La fatigue

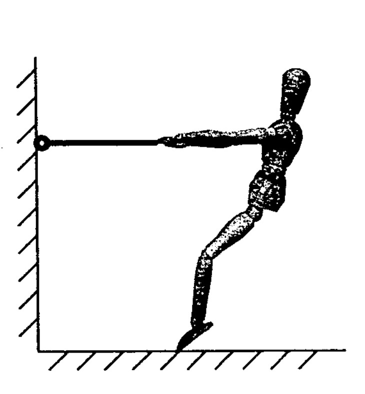
Si le matériau d'une structure est soumis à des sollicitations qui varient fréquemment dans le temps, une rupture fragile peut se produire, sous des sollicitations bien inférieures à la résistance ordinaire du matériau.
Ce phénomène, appelé *fatigue*, est souvent déterminant pour les ponts ferroviaires, pour les grues et pour les machines avec des parties en mouvement. Pour les structures classiques de l'architecture, la fatigue n'est en revanche presque jamais déterminante.

L'équilibre de plus de deux forces dans le plan et dans l'espace

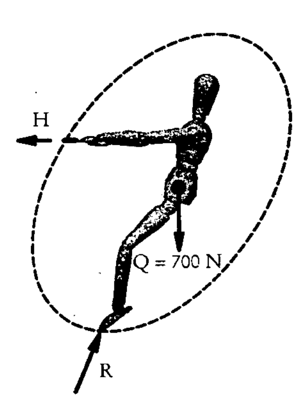
Les structures et les exemples que nous avons considérés jusqu'ici sont caractérisés par l'action de toutes les forces et de toutes les sollicitations sur une seule ligne d'action.
Considérons maintenant un exemple semblable au premier, avec une personne debout sur le plancher, mais avec une force supplémentaire. Imaginons que la même personne se maintienne en équilibre en s'agrippant à une corde fixée à la paroi. Pour simplifier, nous admettrons que la corde est horizontale. Par expérience, nous savons qu'en agissant ainsi la corde sera tendue. En d'autres termes, elle sera sollicitée à la traction. Ceci signifie que si nous isolons un sous-système comprenant la personne et un bout de corde, à part la force de gravitation exercée par la terre sur la personne (Q = 700 N) et la poussée que le plancher exerce sur la personne au droit de la surface de contact entre le pied et le plancher (R), nous devrons aussi considérer la force que la corde exerce sur le sous-système (H). Cette force est exercée par la corde, elle correspond à son effort. Puisque la corde tire le sous-système, dans ce cas la force que nous devons introduire sera orientée de droite à gauche.
Si nous analysons la force que le plancher exerce sur la personne, nous nous rendons compte qu'elle ne peut pas être la force verticale vers le haut habituelle. Cette force sera inclinée. En d'autres termes, en plus de la composante verticale, il y aura aussi une composante horizontale.
La présence de cette composante peut être démontrée en pensant à ce qui se passerait si elle n'existait pas, comme dans le cas d'un plancher très glissant ou si la personne était debout sur un chariot. Dans ce cas, en s'agrippant à la corde et en s'inclinant, la personne glisserait sur le plancher et l'équilibre statique ne serait plus possible.



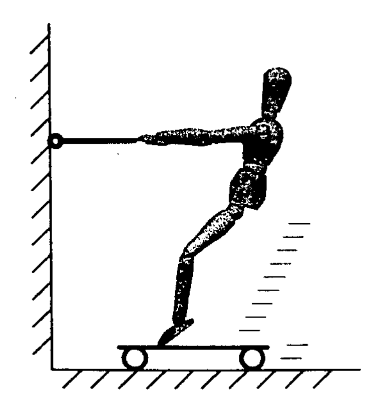
Sous-système avec la personne debout sur le plancher et forces agissantes



Personne qui s'agrippe à une corde



Sous-système et forces agissantes



Situation sans composante horizontale de la réaction du sol

La première condition d'équilibre

En revenant à la situation d'un plancher suffisamment rugueux, nous pouvons trouver la première condition d'équilibre et généraliser ce que nous avons établi précédemment avec deux forces qui agissent sur la même ligne d'action:

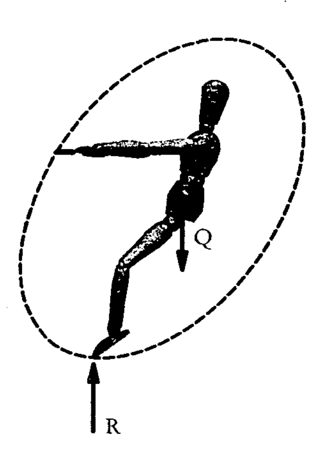
Les forces qui agissent sur un sous-système sont en équilibre si elles s'annulent vectoriellement.

Polygone des forces

R Q = 700 N
H

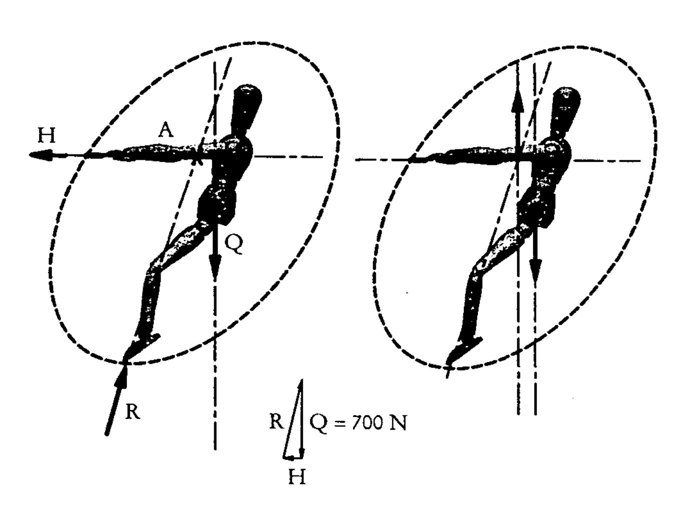
Polygone des forces

Nous pouvons représenter cette condition par un «polygone des forces». Les forces s'annulent vectoriellement quand le polygone est fermé. En d'autres termes, si l'on ajoute un vecteur après l'autre, on retourne au point de départ.
L'intensité de la force de gravitation est connue puisque nous connaissons la masse de la personne. Nous ne pouvons toutefois pas affirmer la même chose à propos des forces exercées par le plancher et par la corde.
Pour calculer leur intensité, nous devons représenter le polygone des forces avec l'inclinaison correcte de la force R exercée par le plancher. Etant donné que cette inclinaison est encore inconnue, nous devons procéder par tentatives successives.



Une première tentative avec la réaction verticale

Faisons d'abord l'hypothèse que la force R soit verticale. Le polygone des forces nous montre immédiatement que dans ce cas l'effort dans la corde s'annule. Nous avons une situation analogue à celle de la personne qui, en se penchant au-delà de la position d'équilibre précaire, provoque le déplacement de la ligne d'action de la force de gravitation au dehors de la surface de contact entre le pied et le plancher. Les deux forces R et Q s'annulent vectoriellement, mais du fait qu'elles ne se trouvent pas sur la même ligne d'action, l'équilibre de la personne n'est pas possible.
Inclinons maintenant légèrement la force R, de façon que les lignes d'action de H et R convergent au point A. C'est comme si ces deux forces agissaient en A.
Il résulte du polygone des forces que les deux forces peuvent être réduites (grâce à la *somme vectorielle*) en une force verticale vers le haut avec la même intensité que Q. Dans ce cas, nous obtenons cependant une situation semblable à la situation précédente. La force Q et la nouvelle force que nous obtenons en sommant H et R s'annulent vectoriellement, mais ne se trouvent pas sur la même ligne d'action: par conséquent, dans cette situation aussi la personne n'est pas en équilibre.



Une seconde tentative en inclinant légèrement la réaction du sol

La seconde condition d'équilibre

A partir de cette considération, il apparaît clairement quelle condition est nécessaire pour que la personne soit en équilibre. Le point A doit se trouver sur la ligne d'action de Q. En d'autres termes, et en généralisant ce que nous venons de démontrer, nous pouvons affirmer que:

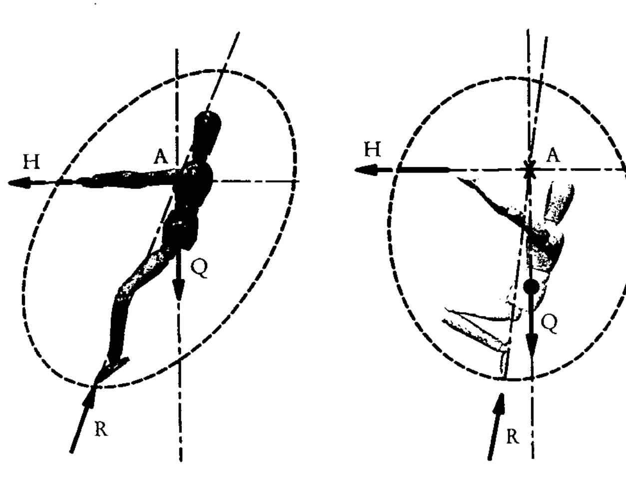
Les lignes d'action de trois forces en équilibre doivent converger en un seul point

Le point d'application d'une force et l'équilibre

Observons que ce point ne correspond pas nécessairement au centre de gravité. Si la personne se baisse sans changer ni la hauteur de la corde, ni la position de ses pieds et la ligne d'action de Q, elle ne modifie en rien la situation d'équilibre. En d'autres termes, le point d'application d'une force peut être déplacé le long de sa ligne d'action sans altérer l'équilibre. En revanche, si nous déplaçons la position des pieds, nous obtiendrons une situation d'équilibre différente, puisque l'inclinaison de la force R exercée par le plancher se trouve modifiée. En déplaçant les pieds vers la paroi, comme le montre le polygone des forces, nous obtiendrons une augmentation de l'effort dans la corde.

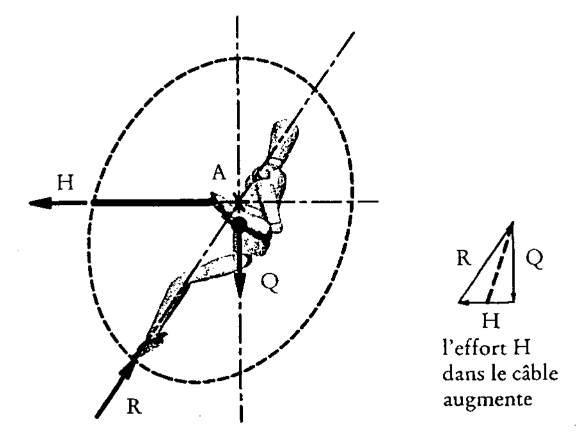
L'angle de frottement

L'expérience nous enseigne qu'en déplaçant les pieds au-delà d'une certaine limite, même avec un plancher rugueux, les chaussures glisseront et la personne tombera. Ceci est dû à un frottement insuffisant entre le plancher et la semelle des chaussures. La limite est atteinte quand l'angle entre la force exercée par le plancher (ou sur le plancher) et la perpendiculaire à la surface du plancher dépasse une certaine valeur appelée *angle de frottement*. Cet angle limite dépend de la

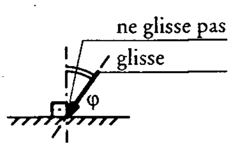


Solution exacte

Situation avec centre de gravité abaissé



Variation des efforts en déplaçant la position des pieds



Angle de frottement

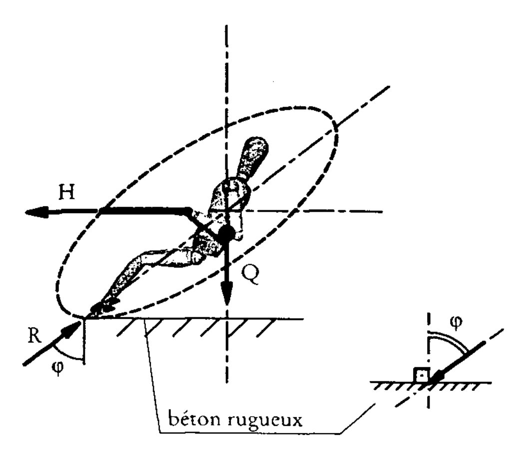
rugosité des surfaces et du type de matériau. Par exemple, une semelle en caoutchouc sur un plancher en béton a un angle de frottement bien plus important que celui d'une semelle en cuir sur une surface gelée. Dans le premier cas, la personne pourra continuer à déplacer ses pieds en avant, de façon à augmenter l'inclinaison de la force R et à augmenter la sollicitation de la corde. Dans le second cas, en revanche, la personne devra maintenir une position presque verticale pour ne pas glisser.

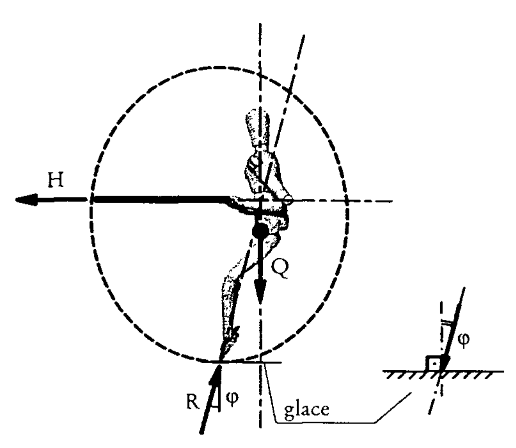
Analysons maintenant la situation, fort semblable, de deux personnes qui s'exercent au tir à la corde.

Faisons l'hypothèse d'une masse différente pour les deux personnes: 70 kg et 100 kg.

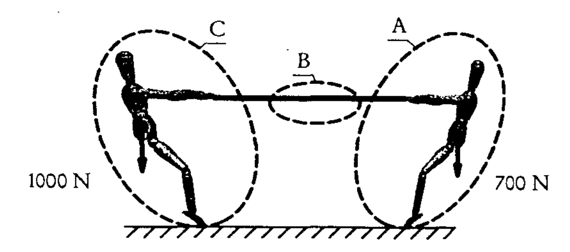
Si nous isolons le sous-système A avec la personne de 70 kg, nous nous rendons compte que les forces impliquées sont identiques à celles que nous avions reconnues dans l'exemple précédent. Il n'y a bien sûr aucune différence si la force sur le sous-système A est exercée par la paroi ou par la personne de 100 kg par l'intermédiaire de la corde.

Pour chaque « sous-système », nous pouvons tracer un polygone des forces.



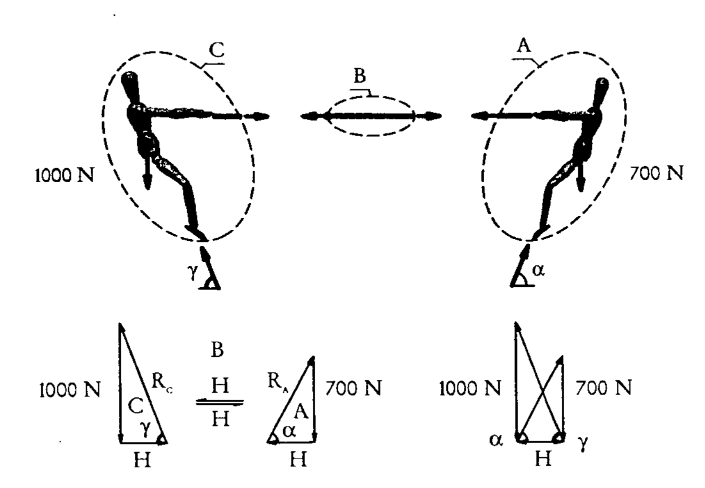


Divers angles de frottement selon le type de plancher



Deux personnes de masse différente s'exercent au tir à la corde

La force H qui apparaît dans tous les sous-systèmes doit clairement avoir toujours la même intensité. En d'autres termes, la force que la personne de 70 kg exerce sur la corde et sur l'autre personne doit correspondre à la force exercée par la personne de 100 kg sur la corde et, respectivement, sur la personne de 70 kg.



Sous-systèmes et diagramme de Cremona

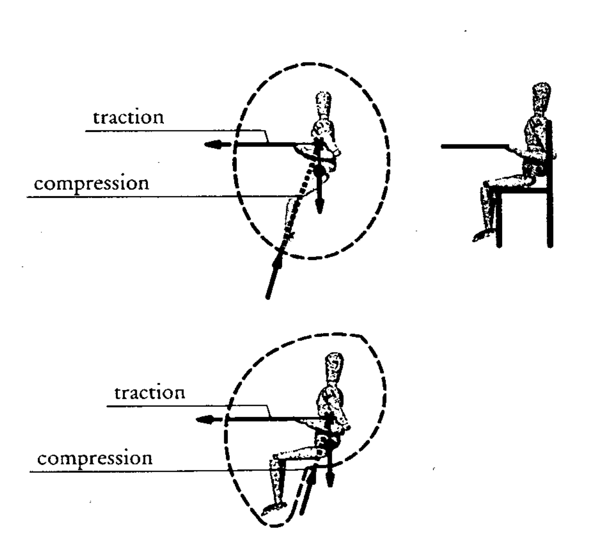
Le diagramme de Cremona

Dans la construction du polygone des forces, pour éviter de reporter plusieurs fois la même force, on compose habituellement plusieurs polygones en un seul dessin, appelé *diagramme de Cremona*.
Dans cette construction il apparaît encore plus évident que les deux personnes se maintiennent en équilibre simplement en variant l'inclinaison de la poussée que le terrain exerce sur elles.
Il faut observer que la force que chaque athlète exerce sur la corde et, par son intermédiaire, sur son concurrent, dépend uniquement:

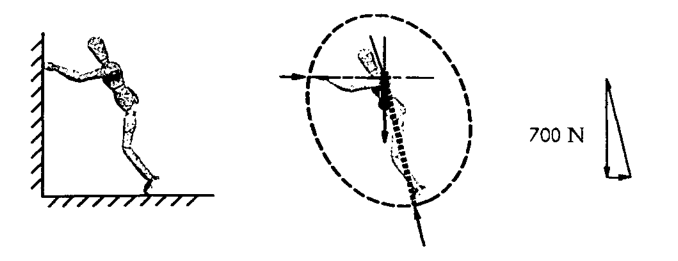
- de son propre poids;
- de la capacité d'incliner la force exercée sur le plancher (en d'autres mots, de l'angle de frottement entre la chaussure et le plancher).

Les forces et les efforts

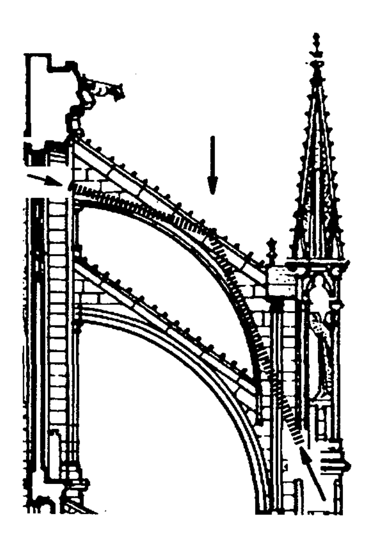
Ce que l'on nomme la «force physique» de l'athlète n'a en revanche aucune influence. En réalité, la musculature, avec le système des os et des tendons, doit simplement être en mesure de transmettre les efforts à travers le corps. Comme le montre la figure ci-contre, les efforts de compression et de traction se trouvent sur des lignes d'action qui peuvent sortir du corps. Nous verrons plus loin comment ces efforts peuvent être repris par la «structure portante» de notre corps. Pour le moment, il suffit de comprendre la nécessité de considérer et d'analyser, outre les forces qui agissent sur le sous-système, les efforts internes au sous-système, représentés par des barres en compression et en traction. De ce point de vue, l'affirmation que le point d'application d'une force peut être déplacé le long de la ligne d'action de la force sans altérer l'équilibre, doit être encore précisée. Cette affirmation vaut effectivement pour l'équilibre général du sous-système. En revanche, le déplacement d'une force exerce une influence sur les sollicitations internes du sous-système. En déplaçant, par exemple, la force exercée par le plancher vers le haut (pensons au cas d'une personne assise sur une chaise), nous garderons les mêmes forces qui agissent sur le sous-système de la personne, mais ses jambes ne seront plus sollicitées.



Le point d'application peut être déplacé le long de la ligne d'action sans influencer l'équilibre, mais les sollicitations internes changent



Personne qui s'appuie sur la paroi, sous-système et polygone des forces



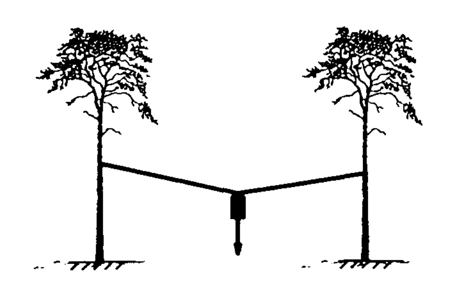
Analogie avec l'arc-boutant dans une cathédrale gothique.

Complétons cette explication avec un exemple fort semblable. Imaginons que la personne qui s'agrippait précédemment à la corde s'appuie maintenant sur la paroi. Nous savons par expérience que si les pieds glissaient sur le plancher, contrairement à l'exemple précédent, ils s'éloigneraient de la paroi. Ceci signifie que la force que le plancher exerce sur la personne, dans ce cas aussi, est inclinée, mais dans le sens contraire de l'exemple précédent. Si nous isolons le « sous-système personne », nous constatons alors que pour rétablir l'équilibre, il est nécessaire d'avoir aussi une force exercée par la paroi, qui dans ce cas ne tire plus la personne par l'intermédiaire de la corde, mais la pousse, en exerçant une force de gauche à droite. Ceci signifie que non seulement les jambes, mais aussi les bras sont sollicités essentiellement à la compression.

Les exemples analysés nous ont permis de comprendre quelles sont les conditions nécessaires pour qu'un système, ou seulement une partie (sous-système), soit en équilibre. En même temps, nous avons déjà introduit de véritables structures. Nous verrons par la suite que l'action de la personne qui s'appuie à la paroi est analogue à celle de l'arc-boutant dans une cathédrale gothique.

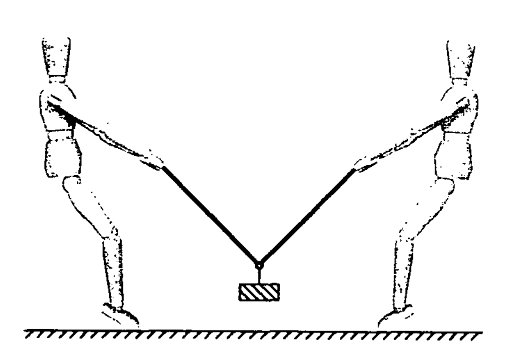


Les câbles



Une corde tendue entre deux arbres est en mesure de soutenir une charge

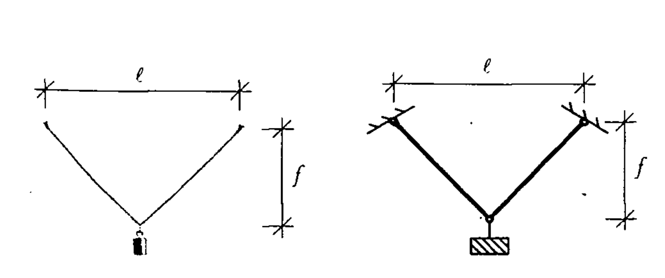
Nous désirons comprendre d'abord le fonctionnement des structures sollicitées à la traction. Avec un câble, nous pouvons soutenir un poids, considéré comme une force de gravitation, ou de manière générale transmettre une force dont la ligne d'action correspond à l'axe du câble.
Si nous pensons au cas des linges qui sèchent suspendus à une corde, ou bien au poids des automobiles soutenues par les câbles d'un pont suspendu, ou encore à d'autres exemples analogues en architecture, comme celui d'une toiture soutenue par un système de câbles, nous constatons qu'un câble ne doit pas nécessairement agir selon la ligne d'action des charges. En pratique, cette situation est celle que nous aurions si nous suspendions un poids au milieu de la corde avec laquelle les deux athlètes s'exercent au tir à la corde.
Cherchons à comprendre le fonctionnement d'une structure de ce type avec un exemple très simple constitué par le modèle représenté ci-dessous. Une chaînette fixée à ses extrémités à deux points au même niveau (par exemple les mains des athlètes de l'exemple précédent) porte une masse de 1 kg située à mi-portée. Si nous isolons un sous-système qui comprend uniquement la masse, nous observons une force de gravitation égale à 10 Newton exercée par la terre et une force de soutien de même intensité exercée par la structure. Nous pouvons donc affirmer que la masse exerce une charge de 10 N sur notre structure constituée par le câble et par les appuis.



Les athlètes qui s'exercent au tir à la corde peuvent soutenir un poids

Le schéma structural

On représente souvent une structure au moyen d'un schéma simplifié. Le câble est remplacé par deux traits et les appuis peuvent être représentés comme dans le schéma structural ci-contre. Comme nous le verrons par la suite, il est important de représenter la structure à l'échelle. Dans notre cas, la pente des deux tronçons (ou segments) de câble doit correspondre à la réalité.
Par expérience, nous savons que sous l'influence de la charge, le câble tend à s'abaisser, jusqu'à atteindre une position d'équilibre. La forme que prend le câble est donc un triangle. En réalité, ceci n'est vrai que dans l'hypothèse où le poids propre du câble est négligeable par rapport à celui du poids soutenu. Nous verrons par la suite quelle forme prend un câble si son poids propre n'est pas négligeable par rapport à celui de la charge.

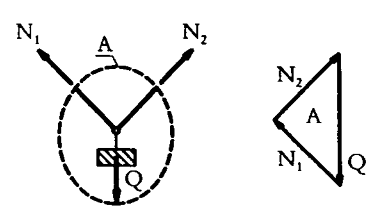


Modèle de câble et schéma structural correspondant

La portée ℓ et la flèche f

La géométrie de cette structure peut être définie par la distance entre les points d'ancrage (appuis) et par la différence de hauteur entre les points d'appui et le point d'application de la charge. Par la suite nous parlerons de portée ℓ, pour

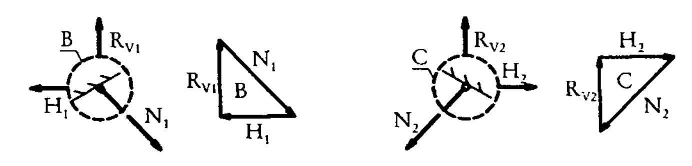
définir la distance horizontale entre les points d'appui, et de flèche *f*, pour la hauteur de la structure.
Pour comprendre le fonctionnement de cette structure, nous pouvons isoler un sous-système qui comprend la masse suspendue et deux tronçons de câble. Là où la limite du sous-système coupe les câbles, nous devons insérer les efforts des câbles. Ces forces exercées par les câbles sur le sous-système doivent avoir comme ligne d'action l'axe des câbles: par conséquent, si la géométrie est connue, nous pouvons tracer le polygone des forces, de façon à garantir l'équilibre. En d'autres termes, les trois forces agissantes doivent s'annuler vectoriellement.
Les intensités des efforts dans le câble N_1 et N_2 peuvent être facilement trouvées, en mesurant la longueur des deux vecteurs que nous avons tracés. A cause de la symétrie du système, les deux intensités seront clairement identiques.
La seconde condition d'équilibre, selon laquelle les lignes d'action doivent converger en un seul point, implique dans ce cas que les deux segments de câble doivent se rencontrer sur la ligne d'action de la force de gravitation.



Sous-système qui comprend la masse suspendue et deux tronçons de câble, polygone des forces

Les appuis

Nous pouvons maintenant analyser les efforts dans la zone des points d'ancrage, appelés aussi appuis. En isolant des sous-systèmes adéquats, nous pouvons analyser la force que le câble exerce sur les appuis, ou inversement la force que ces derniers exercent sur le câble.
En particulier, ces forces peuvent être décomposées en une composante horizontale H et une composante verticale R_v.



Sous-systèmes aux appuis et polygones des forces

Le sens de l'effort sur le sous-système

Il faut remarquer que l'effort N_1 étant un effort de traction, il tire le sous-système A vers le haut, et en même temps tire le sous-système B vers le bas. Pour représenter l'action de la sollicitation dans le sens correct, il faut toujours considérer le type de sollicitation, traction ou compression, en d'autres termes vérifier si la sollicitation « tire » ou « pousse » un sous-système. En raison du fait que dans ce cas nous sommes en présence surtout d'efforts de traction, là où les éléments tendus agissent sur le sous-système, nous devrons introduire des forces qui le « tirent ». En d'autres termes, il s'agit de vecteurs qui s'éloignent du sous-système.
Puisque les sollicitations que nous avons déterminées figurent dans plusieurs sous-systèmes, il convient de composer également dans ce cas les trois polygones des forces dans un diagramme de Cremona.
Il faut remarquer que, quel que soit le sous-système, la forme du polygone des forces change selon l'ordre suivi pour

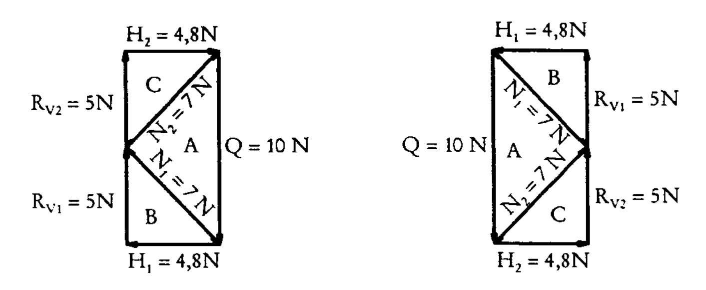
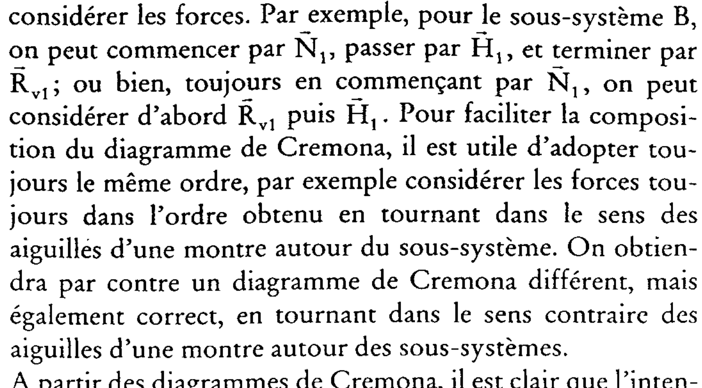


Diagramme de Cremona composé par trois polygones des forces, variantes avec forces disposées dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens contraire (les efforts sont arrondis avec une précision de 0,1 Newton)



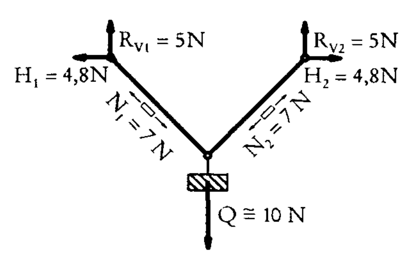
considérer les forces. Par exemple, pour le sous-système B, on peut commencer par $\vec{N}_1$, passer par $\vec{H}_1$, et terminer par $\vec{R}_{v1}$; ou bien, toujours en commençant par $\vec{N}_1$, on peut considérer d'abord $\vec{R}_{v1}$ puis $\vec{H}_1$. Pour faciliter la composition du diagramme de Cremona, il est utile d'adopter toujours le même ordre, par exemple considérer les forces toujours dans l'ordre obtenu en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre autour du sous-système. On obtiendra par contre un diagramme de Cremona différent, mais également correct, en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre autour des sous-systèmes.
A partir des diagrammes de Cremona, il est clair que l'intensité des forces est égale sur les deux appuis, à cause de la symétrie ($H_1 = H_2$, $R_{v1} = R_{v2}$).
En particulier, la moitié de la charge est transmise à l'appui 1 ($\vec{R}_{v1}$), alors que l'autre moitié est transmise à l'autre appui.



Le polygone des forces change selon l'ordre suivi pour considérer les forces

Le type de sollicitation, l'intensité et les forces aux appuis

Pour conclure l'analyse du système, nous pouvons enfin représenter le type de sollicitation, les intensités et les forces sur les appuis. Il faut remarquer que dans cette structure composée de câbles, tous les éléments sont sollicités à la traction.



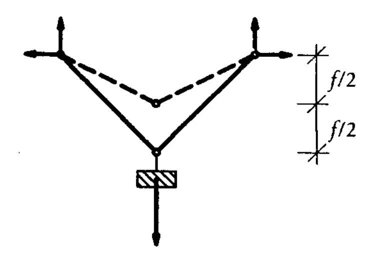
Type de sollicitation, intensité et forces sur les appuis

L'influence de la charge

Comme nous pouvons facilement l'imaginer, les sollicitations et les forces sur les appuis sont influencées directement par l'intensité de la charge soutenue. En doublant la charge, les efforts et les forces doubleront également.

L'influence de la géométrie

Pour comprendre l'influence de la géométrie, nous pouvons tout d'abord réduire de moitié la flèche f en conservant la portée ℓ. Les deux câbles auront des pentes plus faibles, et par conséquent les polygones des forces des trois sous-systèmes subiront eux aussi des modifications.
En comparant le diagramme de Cremona à celui du câble précédent, nous constatons que les forces verticales sur les appuis sont restées les mêmes. Ceci ne nous surprend pas, du fait que ces composantes verticales correspondent à la moitié de la charge verticale, et que celle-ci est restée identique. Les sollicitations dans les câbles ont en revanche augmenté, alors que les composantes horizontales ont carrément doublé.
Si nous avions doublé non seulement la flèche, mais aussi la portée, nous aurions obtenu un câble avec la même forme que le câble original, mais à l'échelle 2:1. Les pentes des câbles restent les mêmes, ainsi que le diagramme de Cremona, de sorte que l'intensité des forces et des efforts ne subit aucune variation.

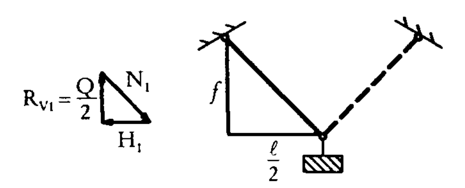


H$_2$
R$_{V1}$
R$_{V2}$
Q
H$_1$

Influence de la flèche sur les efforts

Le rapport ℓ/f

Il est évident que les sollicitations et les forces dépendent uniquement du rapport ℓ/f et de l'intensité de la charge.
Comme nous l'avons vu, la composante verticale des forces sur les appuis correspond à la moitié de la charge: $R_{v1} = R_{v2} = Q/2$.
Pour trouver la relation qui exprime la composante horizontale de la force sur les appuis en fonction de la charge, de la portée ℓ et de la flèche f, il suffit de considérer l'affinité entre le triangle des forces qui se réfère au sous-système B et le triangle défini par le tronçon de câble concerné, la flèche f et la moitié de la portée ($\ell/2$).
En effet, H_1 est à $\ell/2$ comme $Q/2$ est à f. Si on exprime cette relation par une équation, on obtient:



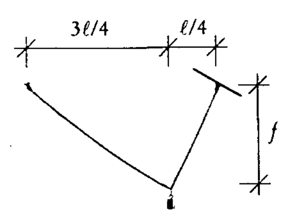
Affinité entre le triangle des forces et le triangle défini par le tronçon de câble concerné

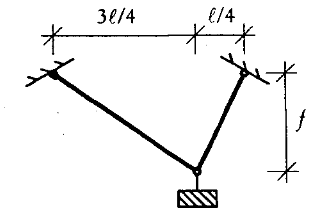
$$\frac{H_1}{\ell/2} = \frac{Q/2}{f} \qquad \text{par conséquent} \qquad H_1 = \frac{Q \cdot \ell}{4 \cdot f}$$

L'effort N_1 peut être trouvé en appliquant le théorème de Pythagore:

$$N_1 = \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{Q^2}{16} \cdot \frac{\ell^2}{f^2}} = \frac{Q}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\ell}{2f}\right)^2}$$

Les mêmes équations valent bien sûr également pour les forces sur l'autre appui et pour la sollicitation N_2, en raison de la symétrie du système et des charges.

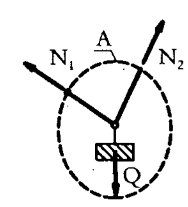


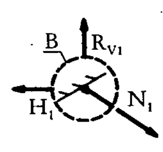


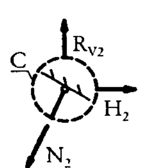
Charge suspendue à un quart du câble

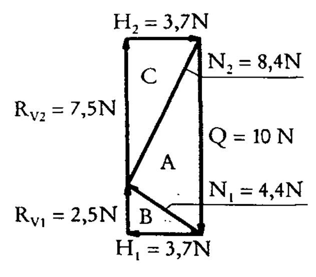
L'influence de la position de la charge

Considérons maintenant un exemple où la charge n'est pas suspendue au centre du câble, mais se trouve à un quart de la portée, alors que la charge, la portée et la flèche demeurent inchangées par rapport au premier exemple analysé.
En appliquant le procédé déjà utilisé pour l'analyse du système symétrique, nous pouvons résoudre facilement ce nouvel exemple.
Comme nous le constatons dans le diagramme de Cremona, les sollicitations des câbles et les forces sur les appuis ont changé.
La charge est transférée principalement à l'appui le plus proche. La composante verticale de la force sur cet appui équivaut en effet aux 3/4 de la charge, alors que l'autre force, correspondant au quart restant, est transférée à l'autre appui. Les composantes horizontales des forces sur les appuis sont en revanche égales. Ceci est vrai en général, quand les charges sont verticales.

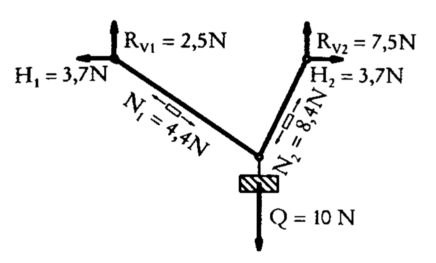




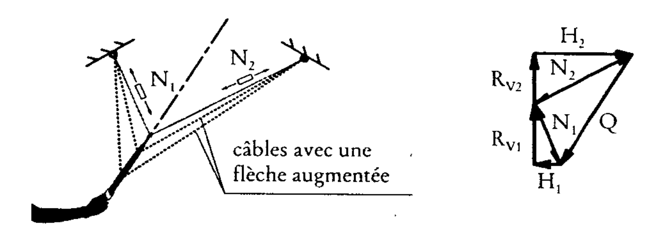




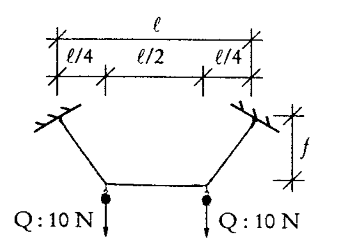
Sous-systèmes et diagramme de Cremona (les efforts déterminés sont arrondis avec une précision de 0,1 N)



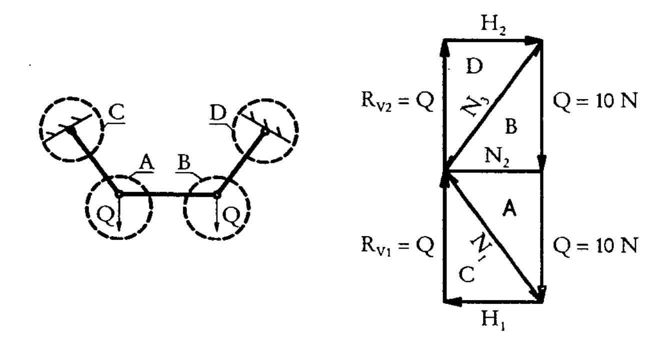
Type de sollicitation, intensité et forces sur les appuis



Charge dans une direction quelconque et diagramme de Cremona



Cas avec deux forces verticales qui agissent à 1/4 et à 3/4 de la portée



Sous-systèmes et diagramme de Cremona

Par rapport au cas symétrique, la sollicitation du tronçon de câble qui relie la charge à l'appui le plus proche augmente elle aussi, alors que la sollicitation de l'autre tronçon diminue.

La charge dans une direction quelconque

Dans le cas d'une charge qui agit dans une direction quelconque, il est également possible de procéder de la même façon. Comme nous l'avons déjà vu, la condition selon laquelle trois forces sont en équilibre si leurs trois lignes d'action convergent en un point exige que les deux tronçons de câble convergent sur la ligne d'action de la charge.
En faisant varier la flèche, on obtiendra les géométries du câble représentées en traitillé dans la figure ci-contre.
Comme on peut l'observer dans le diagramme de Cremona, à la différence des cas avec les charges verticales, les deux composantes horizontales des forces sur les appuis n'ont pas la même intensité.

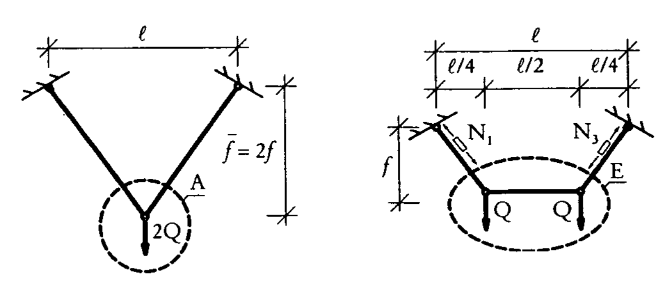
Le câble avec deux charges verticales

Revenons maintenant à un cas avec des charges verticales, mais avec deux forces qui agissent à 1/4 et à 3/4 de la portée. Sous l'action des deux charges, le câble prendra une forme polygonale constituée de trois segments.
Si les deux charges ont la même intensité et si les deux appuis sont au même niveau, le tout sera symétrique. Le segment central du câble ne peut donc qu'être horizontal.
L'analyse de la structure peut être effectuée en considérant les sous-systèmes A, B, C, et D représentés dans le schéma ci-contre. A partir du diagramme de Cremona, il est évident que chacune des deux charges est transmise uniquement à l'appui le plus proche, alors que l'effort de traction N_2, dans le segment central horizontal, correspond à la composante horizontale des forces sur les appuis.

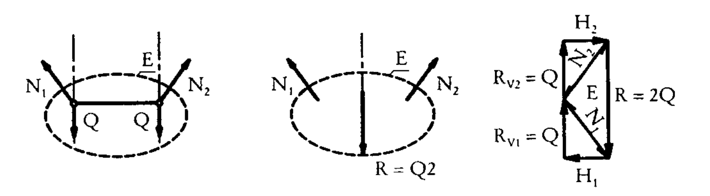
Nous pouvons constater que le diagramme de Cremona est fort semblable au diagramme obtenu dans le premier cas analysé avec une seule charge agissant à mi-portée. Si nous avions une charge unique égale à 2Q et si la flèche était portée à $2f$, de façon à obtenir la même pente des segments de câble en proximité des appuis, nous obtiendrions des sollicitations égales et des forces identiques sur les appuis. Cette situation est représentée dans la figure ci-contre.

Si dans l'exemple avec deux charges nous analysions un sous-système E comprenant tout le segment central du câble et les deux charges, le polygone des forces serait identique à celui du sous-système A dans l'exemple avec une seule charge doublée.

Dans l'analyse du sous-système E, les deux charges Q peuvent évidemment être remplacées par leur résultante R, considérée comme somme vectorielle. La ligne d'action de la force résultante doit passer par le point d'intersection des lignes d'action des efforts N_1 et N_2, comme dans le cas avec une seule force. La ligne d'action de la résultante correspond dans ce cas clairement à l'axe de symétrie du système et des charges.



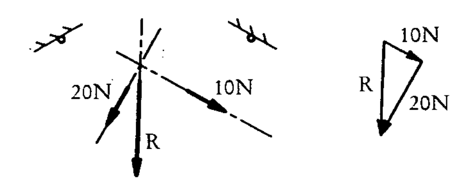
Analogie entre le cas avec deux forces et le cas avec une seule charge correspondant à la force résultante



Equivalence des deux sous-systèmes

Le câble de la résultante

Cette construction au moyen de la résultante peut être fort utile dans l'étude du cas général de deux forces non verticales avec une géométrie quelconque.

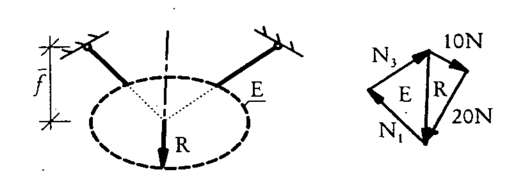


Cas général de deux forces non verticales avec une géométrie quelconque, détermination de la force résultante

Le câble avec deux charges non verticales

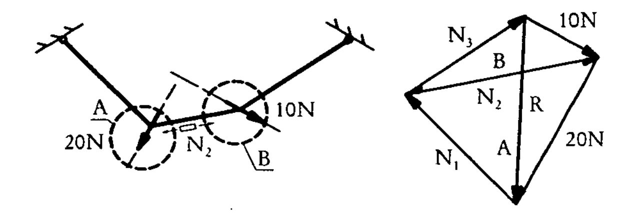
Le premier pas consiste à déterminer la résultante de deux charges : il s'agit de calculer leur somme vectorielle. Naturellement, la ligne d'action de la résultante doit converger en un point avec celle des charges.

Une fois déterminées l'intensité et la ligne d'action de la résultante R, il est facile de construire un câble en mesure de la reprendre et de la transmettre aux appuis. De façon analogue aux autres cas précédemment analysés, nous pouvons choisir la flèche $\bar{f}$, ou bien l'inclinaison d'un des deux segments de câble. Il faut remarquer qu'en général la flèche $\bar{f}$ du câble en mesure de reprendre la résultante ne correspond pas à la flèche réelle du câble. Dans le cas traité précédemment, avec deux charges verticales à 1/4 et 3/4 de la portée, la flèche du câble qui correspond à la résultante est le double de la flèche réelle du câble. En revenant à l'exemple avec les deux charges non verticales, nous pouvons observer que dans ce cas aussi, à proximité des appuis, le câble de la résultante correspond au câble que l'on obtiendrait avec deux charges réelles. Les sollicitations N_1 et N_3 peuvent donc être déterminées à l'aide du sous-système E. Cette construction est valable



Câble de la résultante et analyse du sous-système comprenant la résultante

entre les appuis et les intersections du câble avec les lignes d'action, où le câble sera dévié. C'est donc seulement dans la zone située entre les deux charges que les deux câbles, le câble réel et celui en mesure de reprendre la résultante, sont distincts.
La pente selon laquelle le câble réel sera dévié dans cette zone peut être déduite directement du diagramme de Cremona en analysant le sous-système A.
Si la construction est exacte, l'équilibre du sous-système B est lui aussi automatiquement satisfait. Il faut observer que cette construction a permis de déterminer non seulement les sollicitations, mais aussi la forme que le câble doit prendre pour pouvoir reprendre les charges et les transmettre aux appuis.



Câble réel et analyse des sous-systèmes, diagramme de Cremona

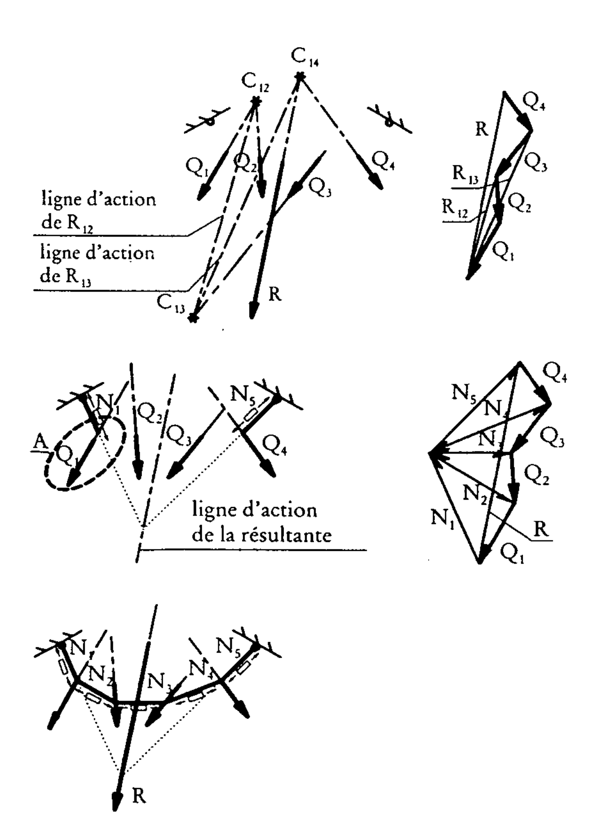
Le câble avec plusieurs charges non verticales

Ce procédé peut être utilisé également en présence de plusieurs forces. Dans le cas particulier où les lignes d'action de toutes les forces convergent en un seul point, la ligne d'action de la résultante peut être déterminée immédiatement. La direction peut être trouvée au moyen du diagramme de Cremona, et ensuite, la ligne d'action de la résultante peut être tracée en la faisant passer par le point d'intersection des lignes d'action des charges.

Le cas général

Dans le cas général, quand les lignes d'action des charges ne se croisent pas en un seul point, il est en revanche nécessaire de procéder par étapes successives:

1. Déterminer la résultante partielle R_{12} des deux premières charges Q_1 et Q_2. Sa ligne d'action passe par le point d'intersection C_{12} des lignes d'action de Q_1 et Q_2.
2. Déterminer la résultante partielle R_{13} des trois premières charges en additionnant Q_3 à R_{12}. Sa ligne d'action passe par le point d'intersection C_{13} des lignes d'action de R_{12} et Q_3.
3. Répéter ce procédé, en ajoutant une force à la fois jusqu'à obtenir la résultante R et sa ligne d'action.



Cas général et procédé de résolution

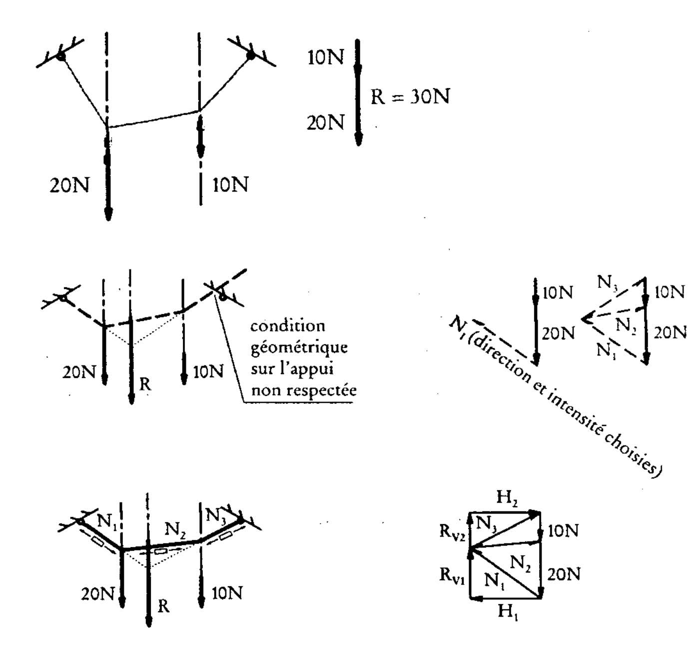
A ce point, le problème est semblable au cas avec deux forces. Il s'agit de définir un câble en mesure de reprendre la résultante, en choisissant la flèche $\bar{f}$ correspondant à la résultante, ou bien en définissant la pente d'un des deux segments de câble reliés aux appuis. A l'intersection avec la première (sous-système A) ou avec la dernière force, il est ensuite possible d'analyser comment le câble doit être dévié, et en répétant l'opération de force en force, on obtient enfin la forme complète du câble.

Les charges parallèles non symétriques

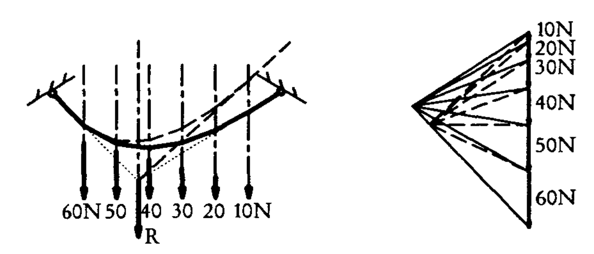
En principe, ce procédé peut être utilisé également en présence de charges verticales uniquement. L'intensité de la résultante peut être tout de suite déterminée en sommant les charges. En ce qui concerne sa ligne d'action, si le cas n'est pas symétrique, la solution n'est pas immédiate. Dans ce cas aussi, la ligne d'action de la résultante converge en un point avec les lignes d'action des charges: ce point est toutefois *à l'infini* puisque toutes les lignes sont parallèles !
Etant donné que la résultante et sa ligne d'action dépendent uniquement des charges sans être influencées par le type de câble, et encore moins par ses appuis, la solution peut alors être trouvée en utilisant à l'envers la méthode précédemment décrite.

Le câble auxiliaire

Dans la pratique, nous pouvons commencer par le diagramme de Cremona, en choisissant la pente du premier segment de câble et sa sollicitation. Après avoir effectué ce choix, nous pouvons ensuite déterminer les inclinaisons des deux autres segments de câble, en nous référant toujours au diagramme de Cremona. En revenant à la situation géométrique, nous pouvons enfin tracer un câble qui respecte les conditions d'équilibre, mais pas nécessairement les conditions géométriques des appuis. C'est pourquoi nous appellerons cette construction *câble auxiliaire*. Elle nous permet de déterminer un point de la ligne d'action de la résultante en prolongeant simplement le premier et le dernier segment du câble, jusqu'à ce qu'ils se rejoignent.
Il faut observer que le choix initial de la pente du premier segment de câble et de sa sollicitation n'a rien à voir avec le choix de la forme du câble réel. Il s'agit simplement de choisir un câble qui a comme seul but la détermination de la ligne d'action de la résultante, sans pour autant coïncider nécessairement avec le câble réel.
Une fois la ligne d'action de la résultante obtenue, nous pouvons oublier le câble auxiliaire. Le procédé est désormais identique à celui que nous avons expérimenté dans les cas précédents: choix d'un câble réel correspondant à la résultante qui respecte les conditions géométriques sur les appuis, construction du second segment de câble, en considérant la déviation de la première charge, construction des autres segments, pour enfin terminer avec la détermination des sollicitations et des forces sur les appuis.
Le choix du câble réel fait donc partie du projet. Il est possible de choisir des câbles avec une flèche réduite et, par conséquent, très sollicités, ou bien avec une flèche plus grande, de façon à réduire les sollicitations.



Cas avec deux charges parallèles non symétriques et procédé de résolution au moyen du câble auxiliaire (le traitillé indique le câble auxiliaire, alors que le trait continu représente le câble réel)



Exemple avec 6 charges verticales

L'exemple ci-contre comprend six forces verticales, mais bien entendu ce procédé peut être employé pour n'importe quel nombre de charges.
Dans cet exemple, la pente du premier segment du câble correspond à celle du câble auxiliaire. Il faut remarquer que cette coïncidence n'est en aucun cas indispensable.

Le centre de gravité

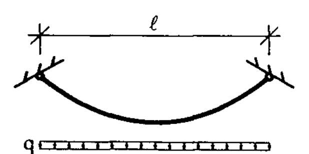
La détermination de la force résultante au moyen d'un câble auxiliaire peut également être utilisée pour trouver le *centre de gravité* d'un corps. Il suffit en effet de subdiviser le corps en plusieurs éléments et d'y appliquer la force de gravitation correspondante. La résultante de ces forces passe nécessairement par le centre de gravité. Si la connaissance de son intensité et de sa ligne d'action n'est pas suffisante, et si l'on désire déterminer aussi son point d'application (précisément le centre de gravité), il suffit de répéter l'opération avec des forces fictives non verticales et de trouver le point de convergence des deux lignes d'action ainsi construites.

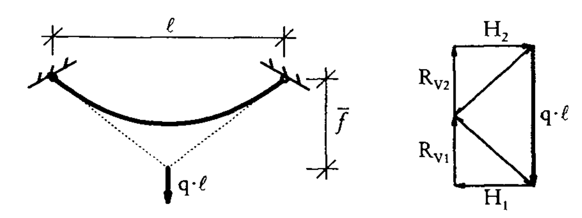
Le polygone funiculaire

Dans les exemples considérés jusqu'à maintenant, les câbles prennent des configurations d'équilibre, caractérisées par des segments rectilignes entre chaque charge et chaque changement de direction qui se produit quand le câble rencontre les lignes d'action des charges. Il s'agit par conséquent d'un polygone défini par les charges elles-mêmes, par la position des appuis et par la flèche choisie, et qui peut être construit par les méthodes que nous avons précédemment décrites. Cette figure géométrique est appelée *polygone funiculaire*.

Les charges réparties

En architecture, les charges qui agissent sont souvent des charges réparties et non des charges concentrées. Il suffit de penser, par exemple, au poids propre des structures ou au poids de la neige. Ces charges réparties peuvent être considérées comme la somme de charges concentrées infinitésimales, disposées l'une à côté de l'autre. Dans ces cas, le polygone funiculaire est donc composé d'un nombre infini de segments d'une longueur infinitésimale et se transforme en une courbe: nous parlerons alors de *courbe funiculaire*.





Câble sollicité par des charges uniformément réparties, câble de la résultante et diagramme de Cremona

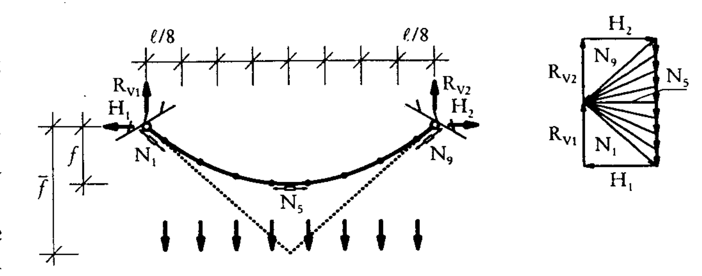
Le câble sollicité par des charges uniformément réparties

Considérons l'exemple d'un câble sollicité par une charge répartie d'intensité constante. Pour les distinguer des charges concentrées, pour lesquelles on utilise des lettres majuscules (Q), les charges uniformément réparties seront décrites par des lettres minuscules (q). L'intensité de la charge est définie comme la force agissant sur une unité de longueur, et s'exprime en kN/m ou N/m.

La résultante de la charge qui agit sur la structure que nous sommes en train d'analyser a donc une valeur de $R = q \cdot \ell$, alors que sa ligne d'action doit se trouver à mi-portée, par symétrie.

Le polygone funiculaire de la résultante avec une flèche $\bar{f}$ et le diagramme de Cremona avec la résultante sont des éléments que nous avons déjà traités précédemment. Nous pourrions nous approcher de la courbe funiculaire en calculant par approximation la charge uniformément répartie comme une série de forces égales, placées à une distance constante.

On peut choisir de subdiviser la portée en huit segments égaux. La charge qui agit sur chaque segment vaut $q \cdot \ell/8$ et sa ligne d'action doit passer par le milieu de chaque segment. Le diagramme de Cremona et le polygone funiculaire peuvent être construits successivement par la méthode déjà décrite.



Câble subdivisé en huit segments égaux, diagramme de Cremona et polygone funiculaire

En comparant le diagramme de Cremona qui vient d'être obtenu avec celui de la résultante $R = q \cdot \ell$, puis en considérant les équations déjà dérivées pour le cas du câble avec une charge concentrée à mi-portée, nous pouvons trouver directement certaines relations en remplaçant Q par $q \cdot \ell$.

Les forces sur les appuis valent

$$R_{v1} = R_{v2} = \frac{q \cdot \ell}{2} \quad \text{et } H_1 = H_2 = \frac{q \cdot \ell^2}{4 \cdot \bar{f}} \cdot$$

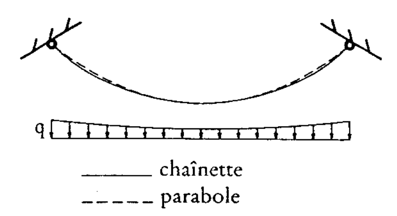
Les efforts maximaux dans le câble correspondent aux efforts provoqués par la résultante

$$N_1 = \frac{q \cdot \ell}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\ell}{2 \cdot \bar{f}}\right)^2}$$

alors que l'effort minimum dans la zone centrale (N_5) a la même intensité que les forces horizontales sur les appuis. Le polygone funiculaire construit avec huit forces présente une flèche f qui est exactement la moitié de la flèche choisie pour la résultante ($\bar{f}$). Ceci vaut également si l'on continue d'augmenter le nombre des forces, de façon à converger vers la courbe funiculaire. En introduisant $\bar{f} = 2 \cdot f$ dans les équations précédentes, nous obtenons par conséquent des expressions valables également pour le cas avec une charge uniformément répartie:

$$H = N_{min} = \frac{q \cdot \ell^2}{8 \cdot f} \quad \text{et} \quad N_{max} = \frac{q \cdot \ell}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\ell}{4 \cdot f}\right)^2}$$

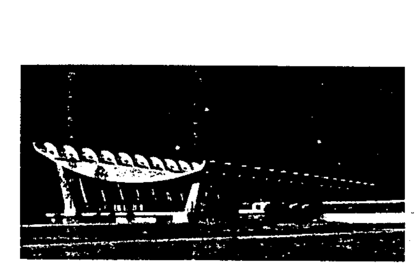
On peut démontrer que la courbe funiculaire pour une charge répartie d'intensité constante est une parabole du second degré. Pour les lecteurs intéressés à la démonstration, nous montrons dans l'annexe 1 à la page 227 l'analyse d'un élément infinitésimal qui permet de dériver l'équation de la courbe funiculaire.

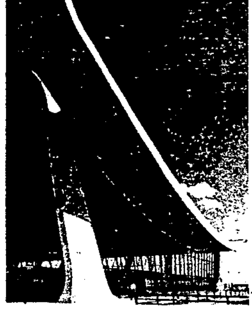


Différence entre la géométrie de la chaînette et celle de la parabole

La chaînette

Si les câbles sont sollicités uniquement par leur poids propre, il faut tenir compte du fait que la charge est constante le long du tracé du câble, et non pas en projection horizontale, comme dans le cas analysé précédemment. Ceci signifie que là où le câble a une plus forte pente, le poids, par unité de longueur horizontale, est supérieur au poids que l'on trouve dans la partie centrale qui a une faible pente. Dans ce cas, le câble prend une forme différente de la parabole.
Cette nouvelle forme est appelée *chaînette* et peut être décrite par l'équation dérivée dans l'annexe 1 à la page 227. Quant le rapport entre la flèche et la portée n'est pas trop grand, et par conséquent la pente du câble à proximité des appuis ne dépasse pas une certaine limite, la différence entre chaînette et parabole est minime.
La figure ci-contre montre un exemple de toiture en béton armé. Puisque le poids propre uniformément réparti sur la longueur est dominant par rapport aux autres charges, la toiture prend la forme de la chaînette.

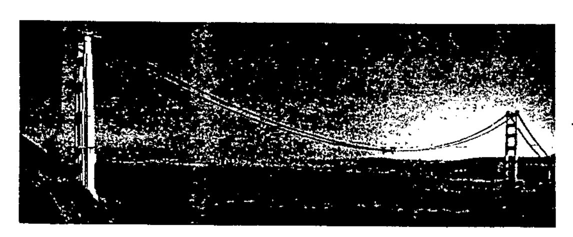


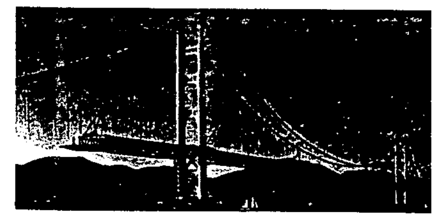


Dulles Airport, Virginia, 1958-63, Arch. Eero Saarinen, Ing. Ammann & Whitney. (ℓ = 49 m, f = 8,25 m, ℓ/f = 5,94)

Les ponts suspendus

Souvent, le poids propre et les charges variables n'agissent pas directement sur le câble, mais sont introduits au moyen de câbles secondaires suspendus au câble porteur. C'est le cas des ponts suspendus dans lesquels le poids du tablier, qui est presque constant dans le sens horizontal, est généralement bien plus élevé que le poids des suspentes et du câble porteur, avec pour conséquence que dans ce cas la géométrie du câble porteur prend une forme proche de la parabole.
Les figures ci-contre montrent le pont *Golden Gate* à San Francisco, avec ses diverses étapes de construction. Durant la pose des câbles porteurs, la forme est celle de la chaînette. En ajoutant le poids du tablier, la forme se rapproche de celle de la parabole.
De toute évidence, les câbles de suspension transmettent des efforts concentrés (forces concentrées sur le câble porteur), et par conséquent la forme effective est polygonale.





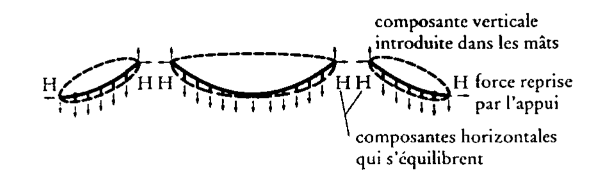
Golden Gate Bridge, Californie, 1937, Ing. Joseph Strauss (ℓ = 1280 m, f = 160 m, ℓ/f = 8)

Si nous observons en détail les câbles porteurs d'un pont suspendu, nous pouvons distinguer trois parties que nous pouvons isoler en autant de sous-systèmes.
Dans la travée centrale, le câble a une géométrie semblable à la géométrie précédemment analysée avec les appuis situés à la même hauteur. Les forces que le câble transmet aux appuis peuvent être décomposées. La composante verticale est reprise par les piles, alors que la composante horizontale est en équilibre avec la composante présente dans les câbles des travées latérales. Celles-ci ont leurs appuis à des hauteurs différentes: une au sommet des piles, l'autre au niveau du bloc de fondation, là où l'effort du câble est transmis (composante horizontale et verticale de la force sur les appuis) au terrain.
Nous pourrions aussi considérer le câble porteur comme un élément unique qui s'étend d'une extrémité à l'autre. Dans ce cas, la limite du sous-système coupe:

- les deux extrémités du câble porteur, sur lesquelles agissent les deux forces d'appui en correspondance des blocs d'ancrage;
- tous les câbles secondaires de suspension, sur lesquels agissent les charges;
- et aussi les deux piles, sollicitées à la compression, raison pour laquelle nous devons insérer deux efforts qui poussent vers le haut.

La forme que prend le câble porteur sur toute sa longueur résulte donc du polygone funiculaire que l'on obtient en considérant les deux appuis aux extrémités et les charges vers le bas, auxquelles doivent être ajoutées les deux poussées vers le haut transmises par les deux piles.





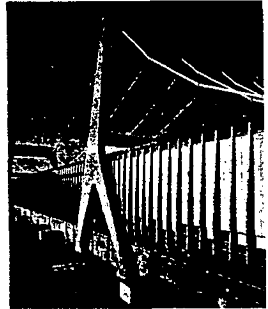


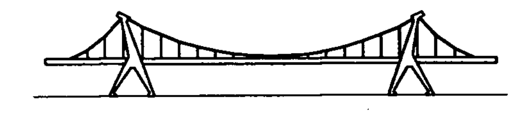
Pont suspendu, trois sous-systèmes en isolant les trois tronçons de câble porteur et sous-système avec tout le câble porteur et les piles

Les applications en architecture

Des structures de ce type trouvent aussi une application en architecture. Les figures ci-contre montrent un exemple dans lequel la toiture est suspendue aux câbles porteurs au moyen de câbles secondaires. Dans ce cas aussi, la toiture est beaucoup plus lourde que le système de câbles et les câbles de suspension sont très rapprochés, de sorte que le polygone funiculaire se rapproche de la parabole. Les câbles porteurs de la travée centrale transmettent leurs forces aux piles comme dans le cas du pont suspendu. L'action des câbles latéraux est toutefois différente dans ce cas, car au lieu de transmettre leur effort à deux appuis ancrés dans le terrain, elles le transmettent à la toiture. Nous reviendrons sur cet exemple plus loin, et nous montrerons comment le câble, en combinaison avec la toiture sollicitée à la compression, forme un nouveau type de structure.











Cartiera Burgo, Mantoue, 1960-64, arch./ing. P.L.Nervi
(ℓ = 160 m, f = 25 m, ℓ/f = 6,4)

Dans les exemples qui viennent d'être décrits, les câbles soutiennent directement ou indirectement, par l'intermédiaire de câbles secondaires, des toitures de bâtiment ou des tabliers de ponts. Dans tous ces exemples, l'importance des éléments définis jusqu'ici comme *appuis* est évidente. En pratique, ceux-ci sont constitués par des piles, des pylônes, des ancrages dans le terrain ou par d'autres éléments de la structure portante.

Les appuis: piles, ancrages et autres éléments

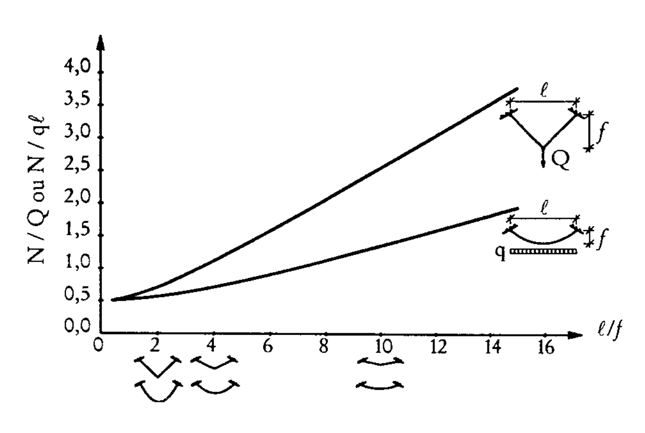
Pour le dimensionnement des câbles, les deux critères précédemment décrits de l'état limite ultime et de l'état limite de service s'appliquent. Le critère selon lequel une structure doit être dimensionnée de façon à rendre une rupture hautement improbable permet de déterminer la section du câble. Au cas où les câbles sont réalisés en acier harmonique, on devra compléter le critère de l'état limite ultime par une condition plus restrictive. Pour éviter des déformations irréversibles trop importantes, et afin de limiter en même temps les problèmes que l'on rencontre habituellement dans la zone d'ancrage des câbles, la contrainte de traction due aux charges permanentes doit être limitée à environ $0{,}45 \cdot f_t$.

Le dimensionnement des câbles

Si les charges sont verticales, les sollicitations plus importantes se produisent là où les câbles ont la plus forte pente. Ceci se produit généralement à proximité des appuis. Pour le dimensionnement des câbles, il est donc suffisant de considérer les sollicitations dans ces zones. Comme nous l'avons vu, ces sollicitations dépendent de l'intensité et de la disposition des charges, mais aussi du rapport ℓ/f. L'influence de ce rapport, appelé *élancement*, est illustrée par le diagramme ci-contre, dans lequel sont représentées les fonctions déjà dérivées dans le cas d'un câble avec une charge concentrée à mi-portée, et dans le cas d'un câble avec une charge uniformément répartie sur toute sa longueur. Sur l'ordonnée est représenté le rapport entre l'effort maximum dans le câble et la somme des charges agissantes. L'augmentation de l'effort, et par là aussi de la section du câble, en fonction de la croissance de l'élancement ℓ/f, est évidente. Si l'élancement est faible, du fait que la portée est petite par rapport à la flèche, l'effort maximal vaut environ la moitié des charges. Si, en revanche, nous avons un élancement qui atteint 15, l'effort correspond à deux, voire quatre fois le total des charges.

La section du câble en fonction de l'élancement ℓ/f

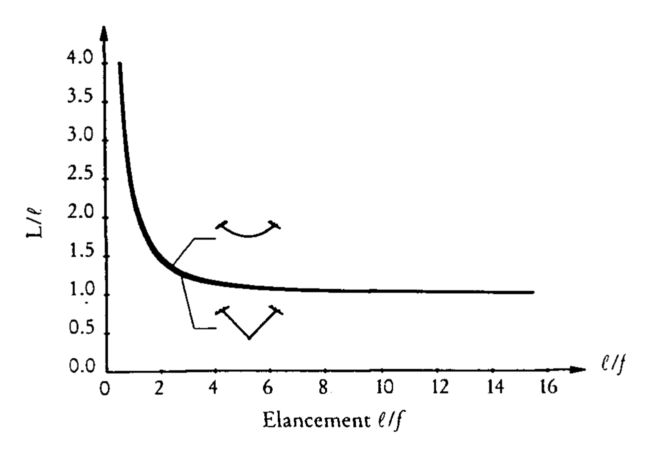
L'accroissement est beaucoup plus rapide dans le cas avec une charge concentrée. Ceci est dû au fait que dans le cas avec une charge uniformément répartie, la flèche de la résultante



Effort maximum dans le câble en fonction de l'élancement ℓ/f

(paramètre qui, comme nous l'avons vu, est déterminant pour l'effort maximum à proximité des appuis) est le double de la flèche réelle.

La quantité totale de matériau employé dépend non seulement de l'aire de la section dimensionnée, mais aussi de la longueur du câble. Ce dernier facteur varie également en fonction de l'élancement ℓ/f. Comme l'indique le diagramme ci-contre, le tracé est toutefois inverse par rapport à celui de l'effort: en augmentant le rapport ℓ/f, pour une portée donnée ℓ, la longueur L du câble diminue.



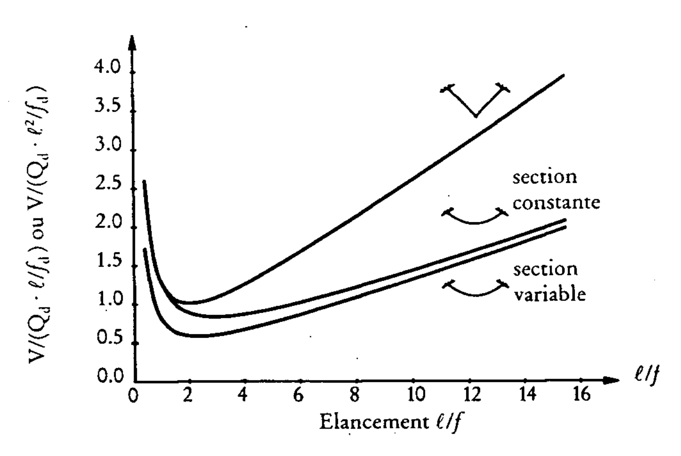
Longueur L du câble en fonction de l'élancement ℓ/f (pour une portée ℓ)

La quantité de matériau en fonction de l'élancement ℓ/f

Les deux facteurs ne se compensent que partiellement. Pour de petits élancements, c'est la longueur qui prévaut, alors que dans le cas de câbles fortement élancés, l'augmentation de l'effort, et par conséquent de la section nécessaire, devient déterminante. Le diagramme ci-contre donne la quantité de matériau en fonction de l'élancement.

Les valeurs reportées sur l'ordonnée sont rendues non dimensionnelles en divisant la quantité de matériau du câble par la quantité de matériau qui serait nécessaire pour soutenir la charge entière Q ou $q \cdot \ell$ au moyen d'un câble vertical d'une longueur ℓ (voir l'exemple de l'ascenseur à la page 21).

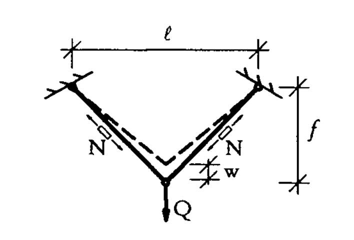
La courbe qui se réfère au câble avec la charge concentrée présente un minimum pour $\ell/f = 2$. Ceci signifie que la plus grande efficacité est atteinte quand la pente des deux segments de câble est égale à 45°. Pour le câble soumis à une charge uniformément répartie, deux courbes sont montrées: la courbe inférieure représente le cas, peu fréquent, d'une variation continue de la section, de façon à exploiter complètement le matériau, alors que dans la courbe supérieure la section plus fortement sollicitée a été conservée sur toute la longueur du câble. Dans le premier cas, la meilleure efficacité est atteinte avec $\ell/f = 2{,}31$, alors que dans le second cas l'élancement optimal a une valeur de 2,93.

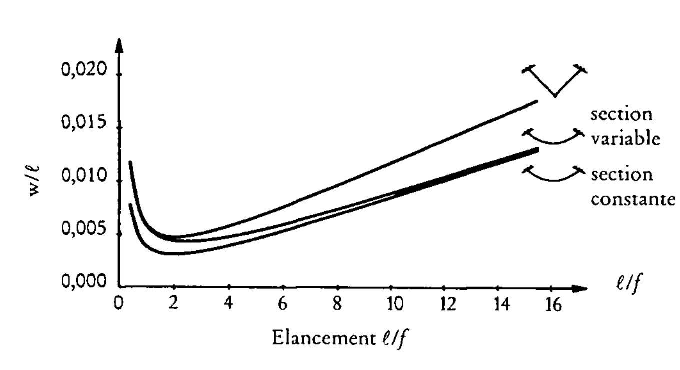


Quantité de matériau en fonction de l'élancement ℓ/f (pour une portée ℓ, charge $q_d \cdot \ell$ ou Q_d et résistance f_d)

Les déplacements causés par la variation d'intensité des charges

Dans les constructions précédemment décrites, des déformations trop importantes peuvent compromettre le fonctionnement. Dans le cas des toitures, les déplacements doivent être limités, de façon à éviter de provoquer des dommages dans les autres éléments structuraux et non structuraux, en particulier dans ceux de la façade. D'autre part, des déformations au-delà d'une certaine limite pourraient gêner l'écoulement de l'eau de la toiture.





Déplacement à mi-portée dû à des charges concentrées ou uniformément réparties en fonction de l'élancement ℓ/f ($\sigma = 0{,}45 \cdot f_t = 707$ N/mm², E = 160000 N/mm²)

Comme le montre l'exemple ci-contre, l'augmentation d'intensité de la charge provoque un accroissement de la sollicitation, qui cause à son tour, en régime élastique, un allongement proportionnel du câble. Cette déformation se traduit par un déplacement, dont le tracé est semblable au polygone funiculaire. Avec des matériaux de construction normaux, grâce à un module d'élasticité élevé, les déformations unitaires sont très petites. Si nous faisons l'hypothèse d'exploiter un câble en acier harmonique jusqu'à une contrainte de $0{,}45 \cdot f_t$, nous aurons une déformation unitaire de seulement 4,4 mm/m (f_t = 1570 N/mm², E = 160000 N/mm²).
Dans les structures de grandes dimensions, des déformations unitaires même relativement petites peuvent provoquer des déplacements excessifs. Dans le diagramme ci-contre, le déplacement d'un câble à mi-portée, avec le degré d'exploitation du matériel et l'allongement décrits ci-dessus, est de nouveau représenté en fonction de l'élancement ℓ/f.
Dans ce cas aussi, pour des élancements très petits, ou très grands, on constate des déplacements importants, alors qu'il en résulte des valeurs acceptables pour des élancements intermédiaires. Pour le cas concret d'un câble parabolique avec ℓ = 80,00 m et f = 8,00 m (ℓ/f = 10), on obtient à partir du diagramme un rapport w/ℓ égal à environ 0,0087, qui équivaut à un déplacement w = 0,0087 · 80,00 = 0,70 m ! Il s'agit d'un mouvement probablement inacceptable pour toute structure secondaire.

Les déplacements causés par les charges permanentes

Il faut dans tous les cas se rappeler qu'une part importante de ce déplacement est due aux charges permanentes qui, habituellement, ne doivent pas être considérées dans la vérification de l'état limite de service. Il s'agit en effet de déplacements qui peuvent être annulés en posant des câbles légèrement plus courts que leur longueur théorique, de façon à compenser la déformation élastique due aux charges permanentes. Les structures secondaires, particulièrement sensibles aux déplacements, sont par ailleurs montées après la pose des câbles et de la toiture, quand les déformations dues aux charges permanentes sont déjà presque complètement présentes.

Les déplacements dus aux charges variables

Le déplacement dû aux charges variables, dont l'effet sur les éléments secondaires est en revanche complet, peut être facilement calculé en faisant l'hypothèse d'un comportement linéaire de la structure. Si on considère le rapport entre charges variables q et charges permanentes g, on obtient: $w(q) = w(g + q) \cdot q/(g + q)$. Si ce déplacement devait lui aussi être inacceptable et si la portée ℓ ne pouvait pas être réduite,

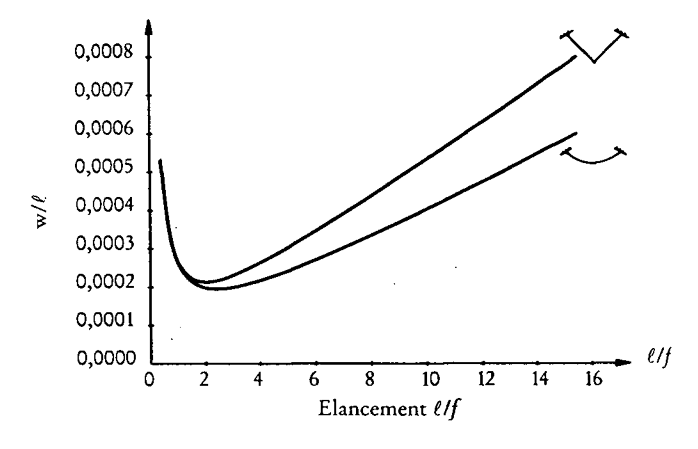
il faudrait augmenter la flèche f, de façon à réduire l'élancement (cf. l'influence dans le diagramme), ou bien réduire la déformation du câble, en augmentant sa section. Dans ce cas, on pourra employer un acier avec une résistance inférieure, sans compromettre le critère de l'état limite ultime.

Les déplacements causés par les variations de température

Nous avons déjà vu qu'une augmentation de la charge provoque un allongement élastique du câble qui induit un déplacement vertical. Une situation identique se vérifie avec l'augmentation de la température qui provoque, elle aussi, une déformation unitaire du matériau, quantifiable par la formule suivante:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \alpha \cdot \Delta T$$

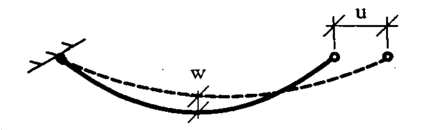
où ΔT est la variation de température en °C et α est la constante de dilatation thermique qui dépend du matériau. Pour l'acier, elle vaut par exemple $\alpha = 0{,}00001$ °C^{-1}. Le diagramme ci-contre montre, toujours en fonction de l'élancement, le déplacement vertical causé par une augmentation de la température égale à 20 °C ($\varepsilon = 0{,}0002 = 0{,}2$ mm/m). Notons l'analogie avec le diagramme précédent, ce qui prouve la similitude des effets. Il faut observer que dans ce cas, la déformation unitaire ne dépend pas de la section du câble. Une fois le matériau choisi, le déplacement provoqué par une augmentation de la température donnée ne peut être réduit qu'en jouant sur les paramètres géométriques ℓ et f.



Déplacement vertical causé par l'augmentation de la température $\Delta T = 20$ °C en fonction de l'élancement ℓ/f ($\alpha = 0{,}00001$ °C^{-1})

L'effet des déplacements horizontaux des appuis sur la géométrie du câble

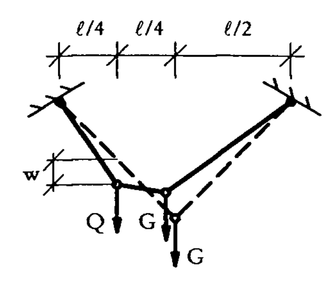
Comme le montre la figure ci-contre, un mouvement horizontal des appuis provoque également un déplacement vertical du câble. En effet, un rapprochement des appuis, en pratique une petite réduction de la portée avec une longueur constante du câble, produit un effet analogue à celui de l'allongement du câble avec une portée constante analysé précédemment.

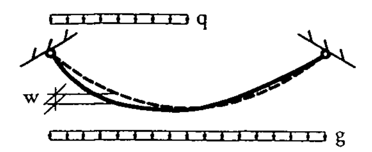


Effet des déplacements horizontaux des appuis sur la géométrie du câble

La variation de la configuration des charges

Si des charges permanentes et variables agissent sur un câble, on constate souvent une variation de la distribution de la charge qui conduit à un changement du polygone funiculaire. Ceci se produit parce que la charge variable, par son caractère aléatoire, peut présenter une distribution différente de celle de la charge permanente.





Variation de la configuration des charges

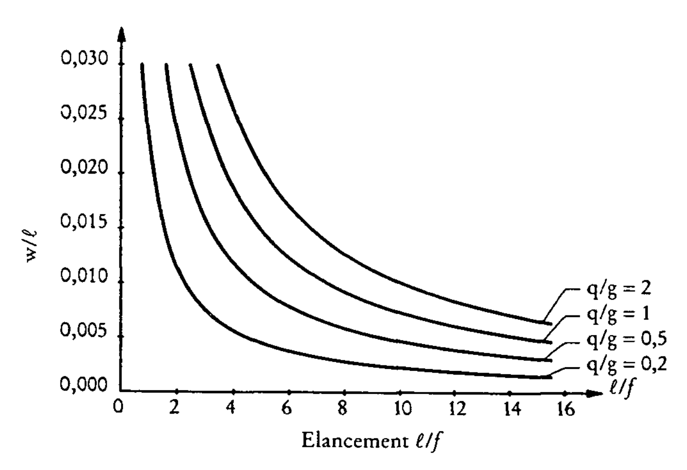
L'exemple ci-contre montre un câble sur lequel agit une charge permanente G à mi-portée, et une charge variable Q au quart de la portée. Sans la charge variable Q, le câble, soumis uniquement à la charge permanente G, prend une forme triangulaire symétrique. Quand on ajoute la charge variable Q, le câble prend en revanche une forme polygonale composée de trois segments. En variant la charge Q, on obtient par conséquent des déplacements bien visibles du câble. Ces déplacements ne sont pas causés seulement par l'allongement du câble, mais ils sont surtout provoqués par le changement du polygone funiculaire, et donc de la forme.

Les déplacements provoqués par des charges variables

Une situation analogue se présente également avec des charges uniformément réparties. Il suffit de penser, par exemple, au cas d'un câble sur lequel agissent la charge permanente g uniformément répartie sur toute la portée, et une charge variable q constituée par le poids de la neige, qui, par exemple à cause du vent, se concentre sur une seule moitié du câble. Le diagramme ci-contre représente le déplacement w en fonction de l'élancement ℓ/f pour quatre valeurs de charge variables. Ce qui est déterminant n'est pas la valeur absolue de la charge variable q, mais bien plutôt le rapport q/g entre la charge variable et la charge permanente. En augmentant ce rapport, on obtient clairement des déplacements plus importants. Le diagramme illustre également avec clarté l'influence de l'élancement ℓ/f. Pour des câbles peu élancés, les déplacements sont très importants; en revanche, si l'on augmente l'élancement, cet effet diminue.

Si nous vérifions notre cas concret avec ℓ = 80 m et f = 8 m, nous obtenons un déplacement de 0,58 m ($w/\ell \doteq 0{,}0072$) si la charge variable équivaut à la charge permanente, alors qu'il atteint 0,80 m ($w/\ell = 0{,}0100$) si la charge variable est le double de la charge permanente.

Comme nous l'avons déjà observé, ces déplacements ne découlent pas de la déformation du matériau, de sorte qu'une augmentation de l'aire du câble ne produirait aucune augmentation de la rigidité.



Déplacement mesuré au quart de la portée, causé par une charge variable distribuée sur une seule moitié de la portée en fonction de l'élancement ℓ/f; paramètre pour les quatre courbes: rapport q/g (déformation du câble négligée)

Procédés pour limiter les déplacements provoqués par les charges variables

Comme l'illustrent les exemples décrits ci-dessus, un simple câble utilisé en architecture, sur lequel agissent en même temps d'autres éléments, satisfera bien difficilement le critère de l'état limite de service. Il est donc indispensable de prendre des mesures pour limiter les déplacements qui découlent du changement de forme causé par les charges variables.

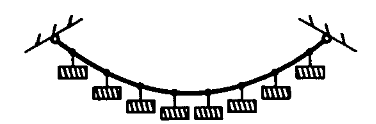
L'augmentation de la charge permanente

Comme nous l'avons vu, le déplacement dépend uniquement du rapport entre la charge variable et la charge permanente. Puisque la charge variable est difficilement influençable (neige, vent, personnes sur la toiture), ce rapport ne peut être amélioré qu'en augmentant la charge permanente.

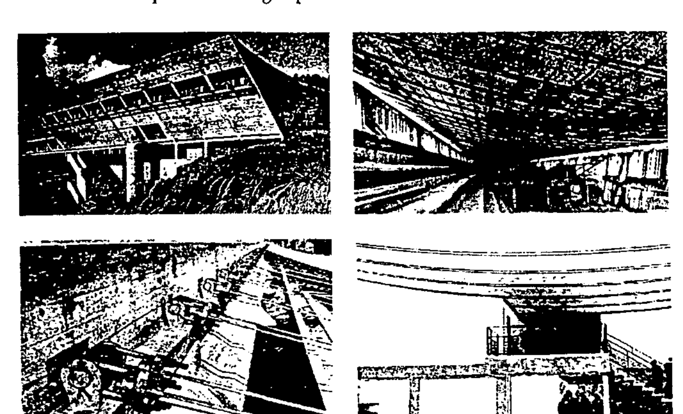
Evidemment, ce procédé augmente aussi les sollicitations du câble et des structures d'appui, ainsi que la quantité correspondante de matériau. Malgré ces inconvénients, cette solution est parfois employée, surtout pour des portées relativement peu importantes. Les figures ci-contre montrent une toiture projetée par le Corbusier, dans laquelle des panneaux en béton armé sont posés sur des câbles en acier harmonique.

Avec ce procédé, il est d'autre part possible de résoudre un autre problème des structures funiculaires. En effet, quand la charge permanente est trop faible, l'appel d'air provoqué par le vent sur la surface externe, ou encore l'augmentation de la pression à l'intérieur de la construction sous l'effet du vent peuvent soulever la toiture.

Pour quantifier l'effet de la charge permanente sur les déplacements, revenons à notre exemple avec ℓ = 80 m et f = 8 m. En conservant la charge variable et en augmentant la charge permanente, jusqu'à atteindre un rapport q/g = 0,2, nous pouvons réduire le déplacement à 0,18 m (w/ℓ = 0,0022, courbe inférieure dans le diagramme de la page précédente).



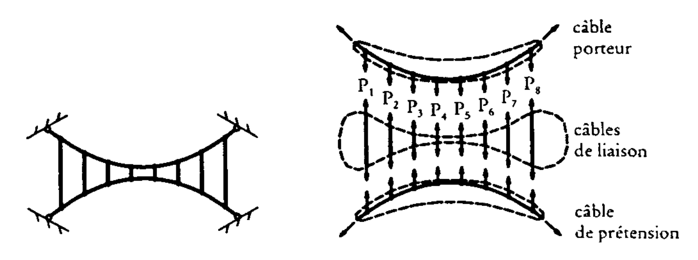
Câble sollicité par des charges permanentes



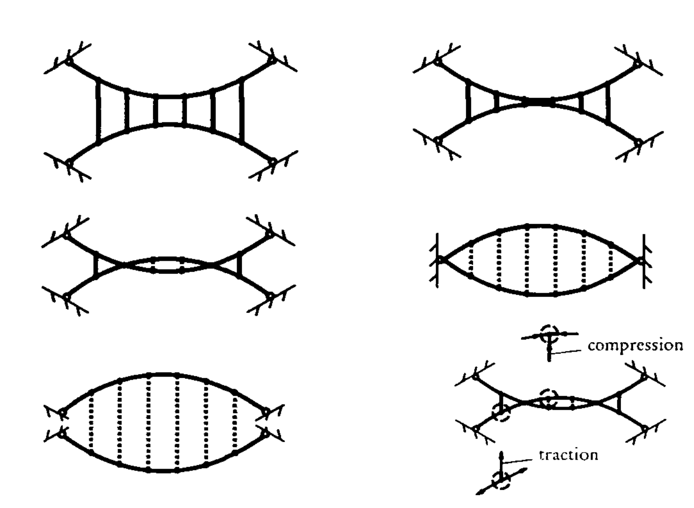
Maison des Jeunes et de la Culture, Firminy-Vert, 1961-65, arch. Le Corbusier, (ℓ = 18,25 m, f = 1,30 m, ℓ/f = 14,04) [© 2004, FLC/ProLitteris]

La solution avec câble de prétension: poutre de câbles

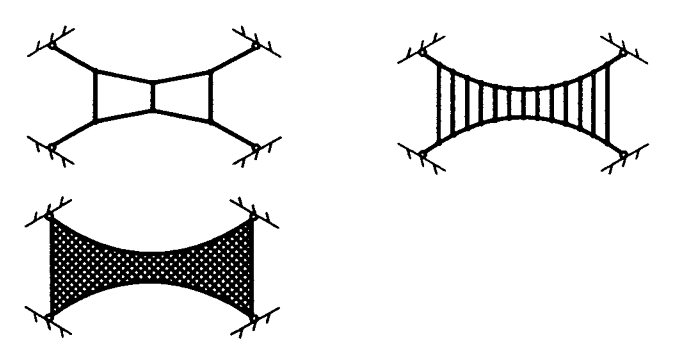
Une solution fort semblable à la solution précédente, du moins du point de vue du fonctionnement, consiste à appliquer des charges permanentes qui ne sont pas des forces de gravitation (poids) mais des actions exercées par un autre câble. Un câble de prétension avec une courbure vers le bas, relié par des câbles de liaison au câble porteur, est en mesure de satisfaire le même but. Le système ainsi obtenu est appelé *poutre de câbles*. Le schéma ci-contre représente les efforts générés par la prétension du système. En isolant les trois sous-systèmes constitués par le câble porteur, le câble de prétension et les câbles de liaison, nous pouvons mettre en évidence les actions que les trois sous-systèmes exercent l'un sur l'autre, même en absence de toute charge externe.



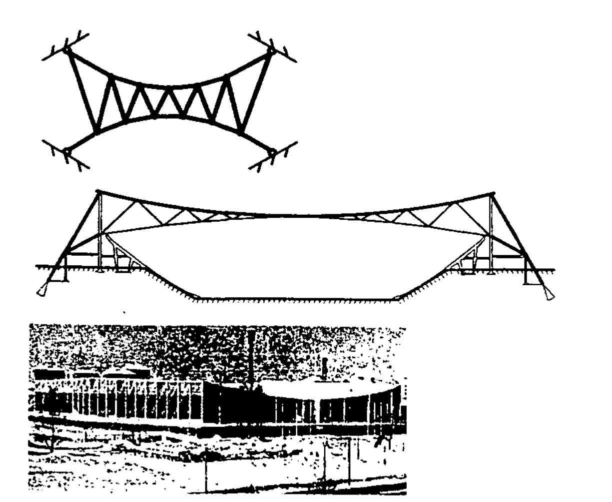
Poutre de câbles avec des efforts de prétension



Cinq poutres de câbles avec une distance différente entre le câble porteur et le câble de prétension; étude des sollicitations dans les éléments de liaison



Poutres de câbles avec peu, beaucoup et une infinité de câbles de liaison

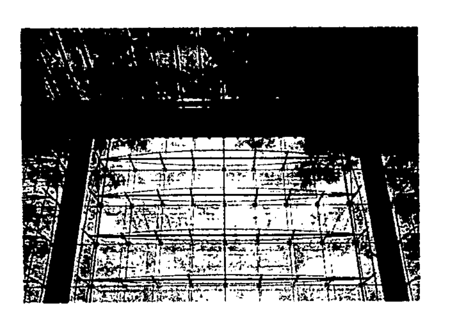


Patinnoire couverte Johannishov à Stockholm, 1962, arch. Hedqvist, ing. Jawerth (ℓ = 83 m)

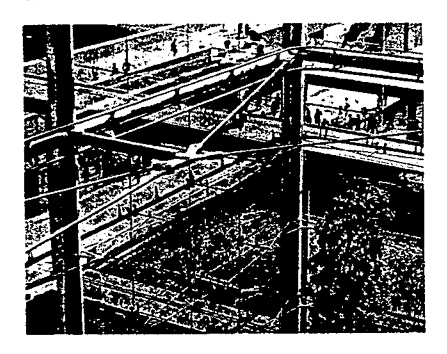
Les forces p_i sont introduites en déplaçant horizontalement un appui du câble porteur, en raccourcissant les câbles de liaison ou en déplaçant un appui du câble de prétension.
En outre, cette solution structurale permet d'éviter le soulèvement de la toiture sous l'effet de l'appel d'air ou de la pression interne causés par le vent.
Les poutres de câbles peuvent prendre diverses formes. Dans le projet de ces structures, pour une portée donnée, on peut en effet faire varier la flèche du câble porteur, celle du câble de prétension, la distance entre les deux câbles et la géométrie des câbles de liaison.
Les figures ci-contre montrent quelques exemples dans lesquels la distance entre le câble porteur et le câble de prétension varient. Là où le câble de prétension monte au-dessus du câble porteur, les éléments de liaison ne sont plus sollicités à la traction, mais à la compression. Cette particularité peut être facilement mise en évidence en isolant des sous-systèmes, comme dans la représentation ci-contre. Dans ces cas, les câbles de liaison devront donc être remplacés par des butons résistants à la compression.
En variant l'entraxe des câbles de liaison, on obtient également diverses géométries des câbles porteurs et de prétension. Si cette distance devient très petite, la forme du câble porteur se rapproche d'une courbe. Les câbles de liaison peuvent aussi être remplacés par des membranes: dans ce cas, le câble porteur et le câble de prétension prendront effectivement la forme d'une courbe.
Les câbles de liaison ne doivent pas nécessairement être verticaux. La poutre de câbles représentée ci-contre est caractérisée par des câbles de liaison disposés en diagonale. Ce système, introduit et développé par l'ingénieur David Jawerth dans les années 1950, est caractérisé par une grande efficacité et a un comportement très rigide sous l'influence des charges non symétriques. Nous reviendrons par la suite sur le fonctionnement des câbles de liaison diagonaux.

Les poutres de câbles, qui sont composées surtout d'éléments sollicités à la traction, sont caractérisées par une grande légèreté et, surtout, par une transparence fantastique. C'est pourquoi l'ingénieur Peter Rice les a introduites dans les années 1980 comme structures stabilisatrices de grands vitrages et de serres, avec la fonction d'élément résistant aux poussées du vent.

Malgré la grande gamme de formes possibles, toutes les poutres de câbles sont caractérisées par un câble porteur avec courbure orientée vers les charges principales (généralement vers le haut) et un câble de prétension orienté dans le sens opposé.



Serres du Parc Citroën, Paris, 1992, arch. P. Berger, ing. P. Rice et D. Hutton

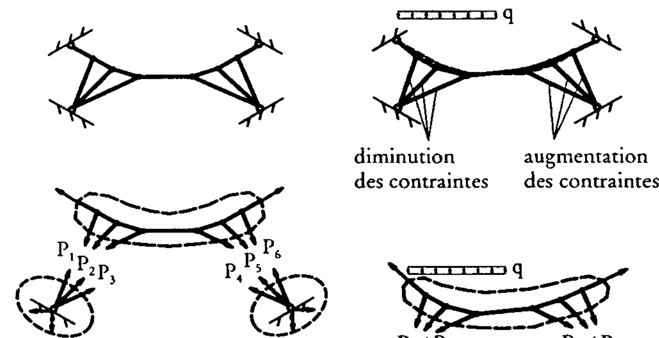


Vitrage de la Cité des sciences et de l'industrie, Paris, 1986, arch. A. Fainsilber, ing. P. Rice et D. Hutton

La solution avec câble porteur et câbles stabilisateurs

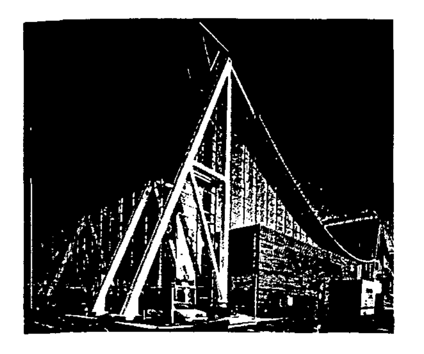
Une solution fort semblable à celle des poutres de câbles consiste en un câble porteur stabilisé par un système de câbles ancrés directement aux appuis inférieurs.

Le fonctionnement est en partie semblable à celui de la solution précédente: les éléments de stabilisation, s'ils sont présollicités, exercent une charge permanente sur le câble porteur. D'autre part, ces éléments peuvent s'opposer au soulèvement du câble porteur dans la zone moins chargée. En cas de déplacement vers le haut du câble porteur, il se produit en effet un allongement des câbles de stabilisation qui, grâce à leur élasticité, se traduit par une augmentation de la sollicitation correspondant à une charge supplémentaire sur le câble porteur, ce qui le stabilise.



Prétension des câbles stabilisateurs (présente également sans charge variable)

Augmentation des sollicitations dans les câbles stabilisateurs qui s'opposent au soulèvement du câble porteur dans la zone avec la plus faible charge variable

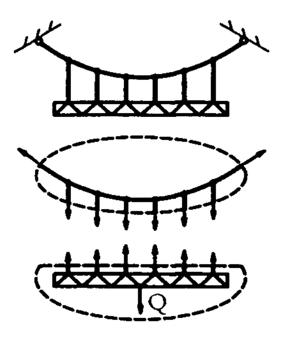




Deutsche Messe Hannover, Pavillon 26, 1996, arch. T. Herzog, ing. J. Schlaich

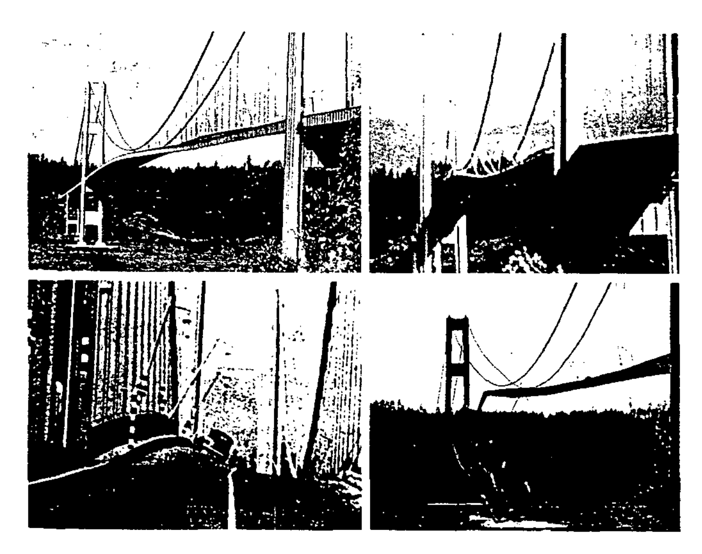
De façon analogue, les câbles stabilisateurs tendent à se raccourcir quand le câble porteur s'abaisse sous l'effet de la charge variable. L'effet produit est que la force de prétension tend à diminuer. Ceci est toutefois un point faible de ces structures: si la diminution de l'effort est supérieure à la force de prétension, les câbles de stabilisation se détendent et deviennent inactifs. Dans l'exemple reporté ci-contre, de véritables ressorts ont été introduits dans les câbles stabilisateurs, de façon à résoudre ce problème.

Le câble avec poutre de raidissement



Câble porteur rigidifié au moyen d'une poutre; reprise d'une charge concentrée au moyen d'un câble parabolique

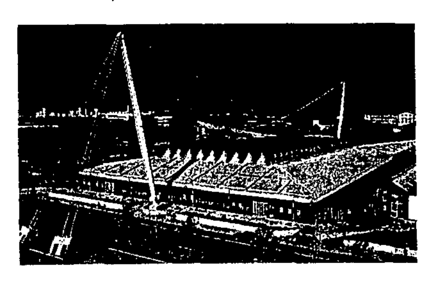
Une autre solution structurale, introduite pour limiter les déplacements causés par le changement de forme sous l'effet des charges variables, est celle de relier le câble porteur à une poutre de raidissement par l'intermédiaire de câbles secondaires. La poutre, grâce à sa rigidité, s'oppose aux déplacements, et redistribue ainsi les charges variables, de façon que la charge sur le câble porteur, représentée par les efforts dans les câbles secondaires, se rapproche de la charge correspondant à la courbe funiculaire. Le schéma ci-contre montre le cas d'une charge concentrée à mi-portée. Sans la poutre de raidissement, la forme du câble tendrait à se rapprocher de celle d'un triangle, avec un déplacement important dans la zone centrale. La poutre de raidissement permet en revanche de distribuer la charge utile sur plusieurs câbles secondaires. Pour jouer ce rôle, la poutre subira cependant des déformations qui auront des répercussions sur la géométrie du câble porteur et sur les efforts qui agissent entre les deux éléments porteurs.



Tacoma Narrows Bridge près de Seattle, 1940, ing. L. Moisseiff (ℓ = 853 m, f = 70,7 m, $h_{impalcato}$ = 2,44 m), écroulement le 7.11.1940 causé par le vent

Cette solution est habituellement utilisée pour les ponts suspendus. Le tablier, sur lequel passe le trafic routier ou ferroviaire, doit avoir une rigidité suffisante pour limiter les déformations provoquées par les charges variables et les oscillations causées surtout par le vent. Dans le cas du *Tacoma Narrows Bridge*, construit avec une poutre de raidissement trop élancée, le vent causa des déformations tellement importantes qu'elles causèrent la ruine de l'ouvrage. Après cet incident, imprévisible selon les connaissances de l'époque, on recommença à construire des tabliers plus rigides. Une évolution durant les années 1960 conduisit à l'utilisation de poutres avec une section fermée et aérodynamique, permettant de réduire à nouveau la hauteur du tablier.

Dans le domaine de l'architecture, ces structures sont employées pour couvrir de grandes portées. La structure de la toiture exerce dans ce cas la fonction de poutre de raidissement, alors que les câbles paraboliques restent découverts. La Cartiera Burgo de Pier Luigi Nervi, que nous avons déjà discutée, représente un exemple typique (page 44). La photo ci-contre montre un autre exemple caractérisé par deux câbles porteurs, soutenus par deux piles et ancrés directement dans le terrain.



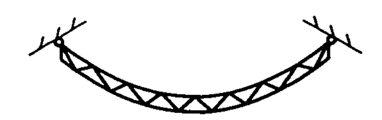
Europahalle, Karlsruhe, 1983, arch. Schmitt et Kasimir, ing. J. Schlaich

Le câble avec rigidité flexionnelle

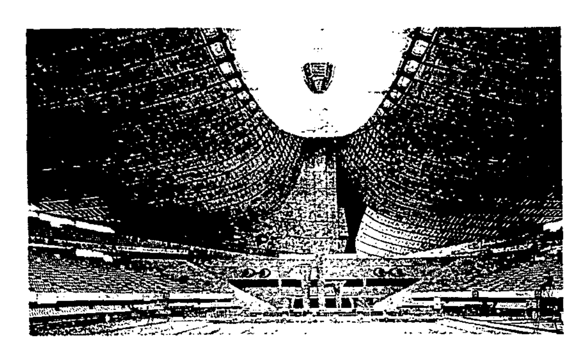
On obtient un fonctionnement analogue si la poutre de raidissement et le câble porteur sont réunis en un seul élément. Sous l'influence de charges permanentes, la structure se comporte comme un câble, alors que les charges variables, concentrées ou appliquées sur une partie de la longueur, sont reprises de la même façon que dans le cas précédent. Grâce à la rigidité flexionnelle, le câble ne doit donc pas se déplacer jusqu'à atteindre le polygone funiculaire des charges. Ceci signifie qu'en présence de rigidité flexionnelle, la ligne d'action des efforts ne coïncide pas nécessairement avec l'axe de la structure.

La structure peut être constituée par un système de câbles reliés entre eux, ou plus facilement par des poutres ou des treillis pliés ou assemblés en forme de chaînette.

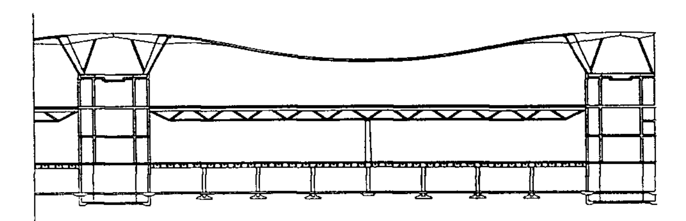
Si la structure est suffisamment rigide, il est possible de choisir une forme qui ne correspond ni à la chaînette, ni à la courbe funiculaire des charges permanentes. Cette particularité permet de s'adapter facilement à diverses exigences.



Câble porteur avec rigidité à la flexion



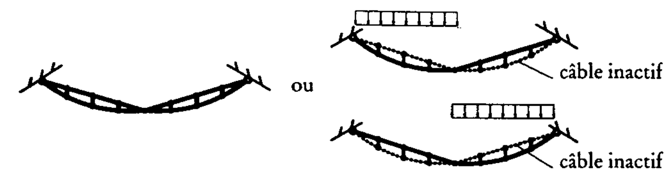
Centre olympique de Tokyo, 1964, arch. K. Tange, ing. Tsuboi, M. Kawaguchi, S. Kawamata



Projet pour un pavillon de la Foire de Bâle, 1996, arch. M. Arnaboldi et R. Cavadini, ing. A. Muttoni ($\ell = 80$ m)

Les systèmes avec des câbles combinés

Une autre solution pour limiter les déplacements provoqués par les charges variables consiste à combiner plusieurs câbles dans le même système, de façon à rendre possible, selon la position de la charge, l'activation du câble en mesure de la reprendre avec le déplacement le plus faible. Si on prévoit des charges uniformément réparties, agissant sur l'une ou sur l'autre moitié de la structure, on peut disposer deux câbles comme dans l'exemple indiqué ci-contre.
Ce système a été adopté pour les travées latérales du *Tower Bridge* à Londres. Dans ce cas, les deux câbles sont reliés par des diagonales qui les transforment en un élément rigide à la flexion comme dans le système précédent.



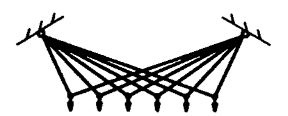
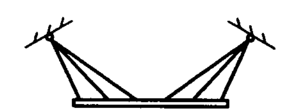
Câbles combinés pour la reprise des charges variables



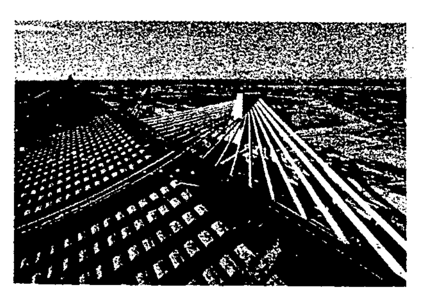

Tower Bridge à Londres, 1894, arch. H. Jones + G.D. Stevenson, ing. J. W. Barry

Les systèmes haubanés

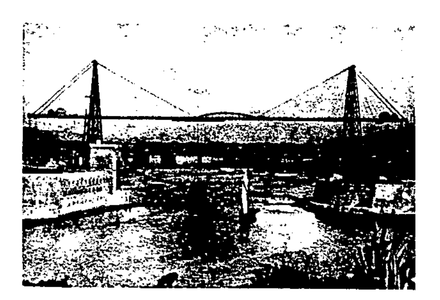
Il est également possible de combiner un grand nombre de câbles avec une distribution polygonale, parfaitement adaptés pour reprendre des forces concentrées s'ils étaient utilisés isolément, mais capables aussi de résister facilement à des charges uniformément réparties par leur action combinée. Souvent, ces structures appelées *systèmes haubanés,* sont complétées par une poutre de raidissement. On évite ainsi de devoir disposer un nombre trop élevé de câbles.
Les systèmes haubanés sont habituellement utilisés pour des ponts de portée moyenne (100-400 m) dans lesquels le tablier fonctionne comme poutre de raidissement. Parfois, ces systèmes sont utilisés aussi comme soutien de toitures.
La poutre de raidissement est souvent disposée de façon à reprendre aussi des efforts de compression, de sorte que les appuis doivent exercer uniquement des forces vers le haut, en mesure de compenser les charges et les forces vers le bas pour stabiliser le système. Le *Pont transbordeur*, construit par l'ingénieur Arnodin à Marseille, représente un des premiers exemples de ce type. Les deux piles soutiennent le poids de la structure et les charges utiles, alors que les deux tirants fixés aux extrémités de la poutre de raidissement et ancrés au terrain garantissent la stabilité de la structure.

Combinaison de plusieurs câbles pour la reprise de diverses charges; système haubané



Centre d'entretien pour les Boeing 747 à Rome-Fiumicino, 1969-70, ing. R. Morandi (ℓ = 80,00 m)



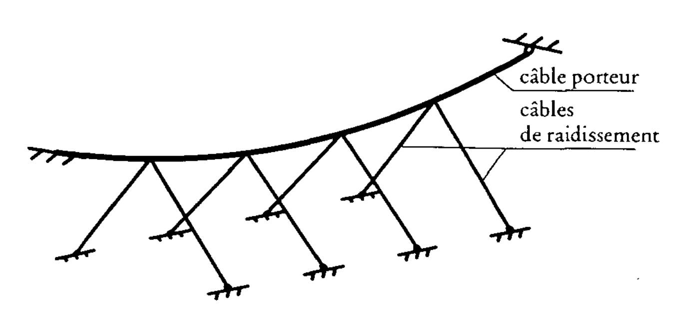
Pont transbordeur à Marseille, 1905, Ing. F. Arnodin

Les réseaux de câbles, les tentes et les membranes

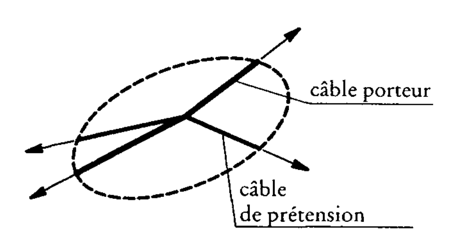
Les systèmes de câbles dans l'espace

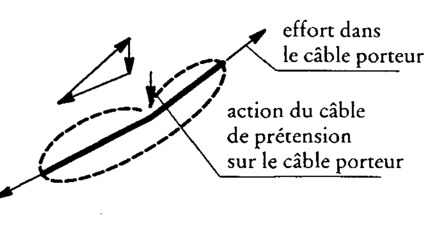
Dans les exemples décrits jusqu'ici, le câble porteur et son système de raidissement étaient toujours disposés dans un seul plan, habituellement vertical. Il est toutefois possible de rigidifier un câble au moyen d'un système de câbles qui sortent du plan principal. De cette façon, on obtient un système extrêmement rigide, même si les forces de prétension sont faibles. Le schéma ci-dessous représente le fonctionnement d'un système pré-tendu. Sur le sous-système découpé autour du câble porteur agissent les deux efforts dans ce dernier et la force de contact exercée par le câble de prétension. Les trois forces sont en équilibre. La force exercée par le câble de prétension correspond à la déviation de l'effort dans le câble porteur. Une même considération peut être faite à propos du sous-système défini autour du câble stabilisateur, et par conséquent le principe selon lequel la déviation de l'effort dans le câble porteur doit être en équilibre avec la déviation de l'effort dans le câble de prétension reste valable. Un câble ainsi stabilisé présente un autre avantage: le système est en effet en mesure de reprendre des charges qui n'agissent pas dans le plan du câble porteur, comme par exemple la poussée du vent.

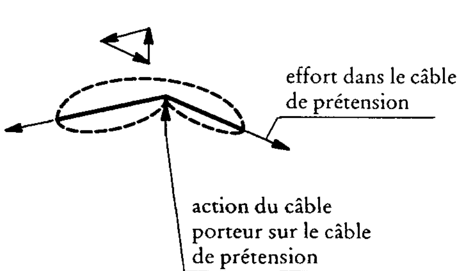
Pour le soutien des toitures, plusieurs câbles porteurs sont nécessaires. Ceux-ci peuvent être parallèles, comme dans la majeure partie des exemples décrits jusqu'ici, ou bien ils peuvent être placés à distance variable. Le faisceau de câbles de prétension précédemment considéré peut croiser tous les câbles porteurs de façon à les stabiliser.



Câble porteur et câbles de raidissement dans l'espace







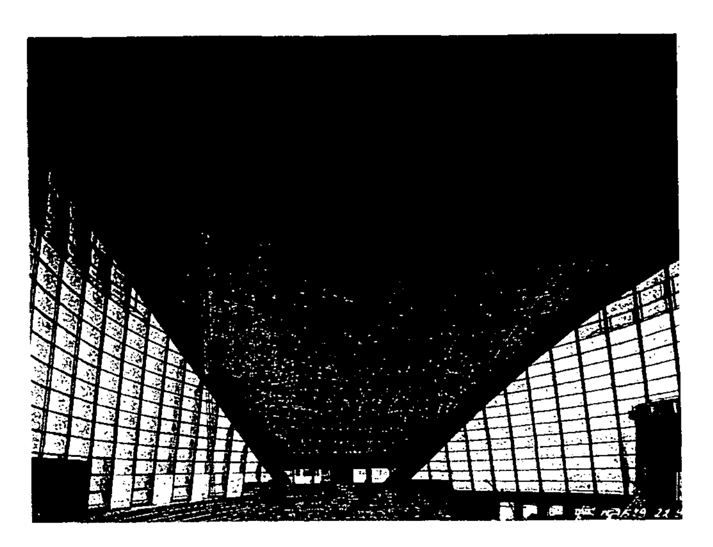
Sollicitation dans les câbles sous l'effet de la prétension

Les réseaux de câbles

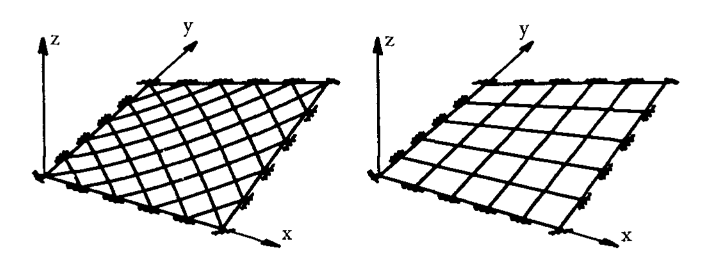
De cette façon, on obtient un réseau de câbles dans lequel, comme pour la poutre de câbles, les câbles porteurs ont une courbure orientée vers le haut, alors que les câbles de prétension ont une courbure inverse et poussent vers le bas, comme l'illustre l'exemple ci-contre. Le fonctionnement statique est également le même: les câbles de prétension exercent une poussée vers le bas qui, ajoutée aux charges permanentes, est reprise par les câbles porteurs. La charge variable, si elle est orientée vers le bas, provoque une augmentation de la sollicitation dans les câbles porteurs et diminue la sollicitation dans les câbles de prétension. Réciproquement, si la charge variable résultante est orientée vers le haut (surpression à l'intérieur du bâtiment), les câbles de prétension seront plus sollicités, alors que les câbles porteurs seront détendus.

Les réseaux de câbles, avec les éléments secondaires qui les recouvrent, décrivent des surfaces dans l'espace. La figure spatiale qui correspond à la parabole dans le plan est le paraboloïde hyperbolique, décrit par l'équation $z = c_1 \cdot (1 + x/c_2) \cdot (1 + y/c_3)$. Ce nom dérive du fait que les sections horizontales de la surface sont des hyperboles, alors que les sections verticales décrivent des paraboles.

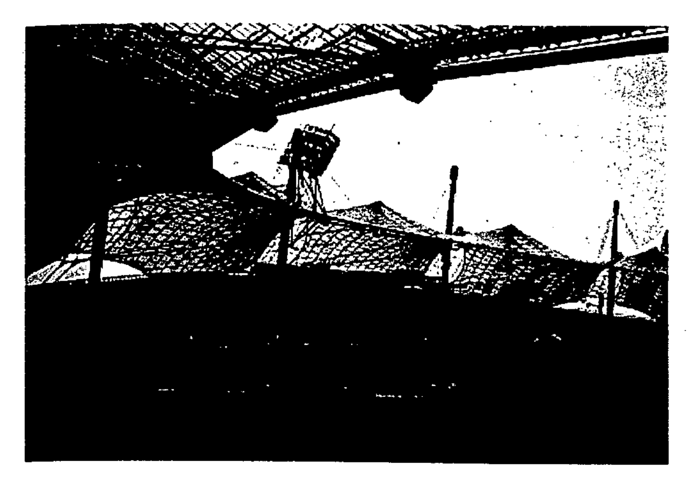
Dans le paraboloïde hyperbolique, comme dans toutes les surfaces de ce type, il est possible de découper la figure géométrique par deux plans verticaux dans des directions bien définies, selon lesquelles la courbe se transforme en une ligne droite (appelée droite génératrice). Dans le cas du paraboloïde hyperbolique défini par l'équation ci-dessus, ces sections sont caractérisées par *x* ou bien par *y* constant. Si les deux faisceaux de câbles sont disposés le long de ces droites on obtiendra des câbles sans courbure, de sorte qu'il sera impossible de créer une interaction entre les deux faisceaux de façon à les stabiliser. D'autre part, les câbles porteurs dont le rapport d'élancement est infini ne peuvent reprendre les charges qu'après d'importantes déformations. Une fois la forme de la surface définie, il est donc indispensable de déterminer les directions des câbles porteurs et de prétension pour lesquels les courbures ne sont jamais nulles. La plus grande efficacité est atteinte quand les courbures – vers le haut des câbles porteurs et vers le bas des câbles de prétension – sont maximales. C'est le cas quand les câbles sont disposés le long des directions principales de courbure de la surface. Les deux directions principales, pour lesquelles la courbure est maximale et minimale (maximum négatif), sont toujours perpendiculaires entre elles.



Stade de Saint-Ouen, 1968-71, arch. A. Kopp, ing. R. Sarger

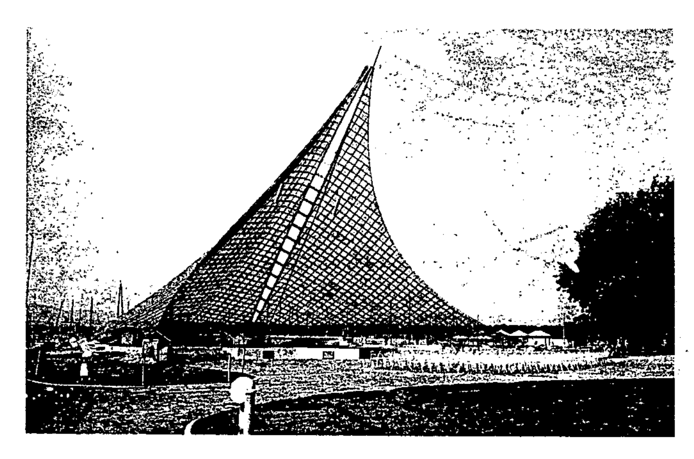


Paraboloïde hyperbolique: cas avec des câbles disposés le long des directions principales de la courbure, et cas avec des câbles le long des droites génératrices; le premier cas est beaucoup plus rigide



Toiture du stade olympique de Munich, 1967-72,
arch. Behnisch & Partner + Frei Otto, ing. Leonhardt & Andrä, J. Schlaich

Comme nous l'avons vu, le paraboloïde hyperbolique a la particularité d'avoir des sections paraboliques avec des forces de déviation uniformément réparties. En faisant varier la répartition de ces forces, on peut obtenir d'innombrables autres surfaces qui, à condition d'avoir les deux courbures principales orientées l'une vers le haut et l'autre vers le bas, peuvent fonctionner comme réseaux de câbles. La toiture du stade olympique de Munich est un exemple illustratif de la liberté formelle que ces structures permettent.
Les réseaux de câbles peuvent être ancrés dans une structure rigide, comme dans le cas du stade de Saint-Ouen, ou bien dans un autre système funiculaire, comme le montre l'exemple de Munich. Dans ce dernier exemple, le câble de bord, chargé par les efforts des câbles porteurs et de prétension, transmet l'effort de traction directement aux appuis constitués par les fondations et les piles. L'exemple ci-contre montre un autre cas où le réseau de câbles est soutenu par une pile et ancré à terre. ABVD.



Konzertmuschel à Radolfzell, 1989, arch. + ing. Ingenieurplanung Leichtbau IPL

Les tentes et les membranes

Dans les exemples décrits ci-dessus, le réseau de câbles constitue la structure portante principale sur laquelle est fixée une structure secondaire. Si les câbles sont rapprochés et entrelacés, le réseau de câbles se transforme en une tente constituée par un tissu. Cette solution structurale est connue depuis la préhistoire: en utilisant des peaux d'animaux ou des tissus fixés au terrain et soutenus par des tiges en bois, l'homme a appris à construire des structures très efficaces.
A part pour les structures qui exigent un montage rapide et fréquent, comme par exemple les tentes de cirque, ce type de structure n'a pas connu un grand intérêt jusqu'au début des années 1960. Avec l'introduction de matériaux synthétiques résistant aux sollicitations et aux intempéries, surtout le polyester revêtu de PVC et le téflon renforcé par des fibres de verre, les membranes ont par la suite trouvé d'intéressantes applications.



Tente traditionnelle en tissu

La structure représentée ci-contre, avec ses 425 000 m² de surface couverte, est sûrement l'un des exemples les plus spectaculaires. En particulier, le temps nécessaire pour le montage est remarquable: seulement trois mois pour l'ensemble de la structure.

Toutes ces structures sont caractérisées par un poids propre très faible. Les sollicitations principales sont donc dues à la prétension et aux charges variables. Le fonctionnement structural est identique à celui des réseaux de câbles. Alors que dans le câble la sollicitation est définie par l'effort N mesuré en kN ou bien Newton et la contrainte du matériau σ est obtenue en divisant N par l'aire de la section, dans la membrane nous avons un effort par unité de longueur n avec les unités kN/m, ou bien N/mm, alors que la contrainte dans le matériau correspond à l'effort n divisé par l'épaisseur de la membrane.

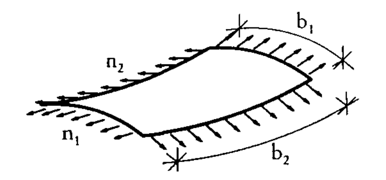
Si nous analysons les sollicitations en isolant un sous-système constitué par un petit rectangle de membrane, nous constatons avant tout que l'élément est soumis à deux sollicitations qui agissent dans deux directions différentes. Ceci ne devrait pas nous surprendre, car cet élément remplace idéalement deux segments de câble porteur et de câble de prétension dans un réseau de câbles.

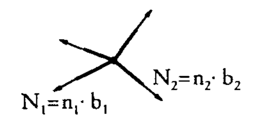
A la différence des poutres de câbles, dans les membranes les sollicitations n'ont pas de direction prédéfinie. D'autre part, comme dans la poutre de câbles, où il est opportun de disposer les câbles porteurs et de prétension en suivant les directions principales de la courbure, dans les membranes aussi on obtient un meilleur comportement si les sollicitations principales sont introduites dans les directions qui correspondent aux courbures maximale et minimale. Ces sollicitations sont appliquées aux membranes en imposant des déplacements aux éléments rigides qui leur servent d'appui ou qui tendent les câbles de bord auxquels elles sont fixées.

Dans le projet d'une tente, comme dans le cas des réseaux de câbles, il faut par conséquent choisir une forme qui présente en tout point deux courbures principales de sens inverse. En outre, les sollicitations de prétension, qui sont introduites pour rendre la forme stable, doivent avoir des directions qui correspondent le plus possible aux directions de courbure maximale et minimale de la surface.

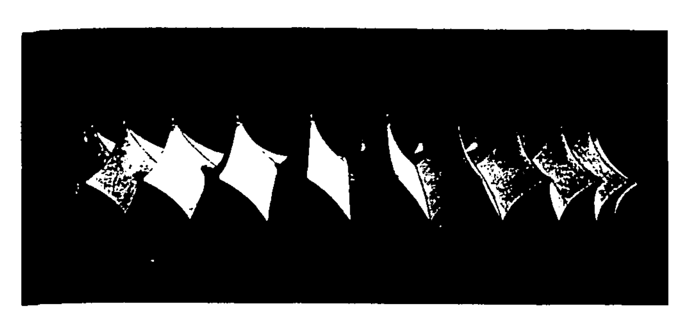


Aéroport de Jeddah, Terminal Haj, 1981, arch. Skidmore, Owings & Merrill, ing. H. Berger (210 éléments à plan carré 45 × 45 m)





Sollicitations d'un petit rectangle de membrane (b_1 et b_2 sont les côtés du rectangle; n_1 et n_2 sont les sollicitations; N_1 et N_2 sont les efforts dans un réseau de câbles analogue)

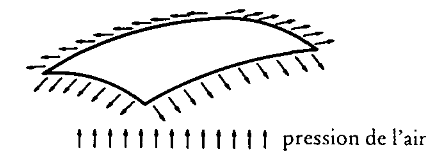


King Fahd Stadium, Riyadh, 1985, arch. I. Fraser, ing. A. Geiger, H. Berger et J. Schlaich

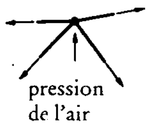
Cette condition concernant les courbures est très importante, non seulement par son influence directe sur la forme, mais aussi parce qu'elle exige généralement toute une série de butons de soutien et de câbles supplémentaires, nécessaires pour fixer et pour stabiliser la forme désirée. Dans l'exemple ci-contre, la membrane est tendue par les câbles de bord et par une série de câbles porteurs (dits *de crête)* et de câbles de prétension (dits *de gorge)*. Avec ces câbles additionnels, on obtient une surface ondulée qui présente la courbure nécessaire.

Les membranes pneumatiques

Dans les tentes à membrane, les charges sont reprises par le système funiculaire porteur, alors que la stabilisation de la forme est garantie par le système de prétension, dans le cas des membranes pneumatiques les charges sont reprises par la pression interne de l'air, alors que les sollicitations de la membrane ont une fonction de prétension. Dans ce cas également, la membrane est sollicitée dans les deux directions; toutefois, du fait qu'elles exercent une fonction de prétension, les deux sollicitations produisent une action vers le bas. La forme géométrique, elle aussi, est nécessairement différente: les deux courbures principales doivent dans tous les cas être orientées vers le bas. Le fonctionnement peut être compris plus facilement si on remplace la membrane par un système de câbles. Dans ce cas, l'effet de la pression interne se concentre en une force vers le haut qui agit sur le nœud d'intersection des deux câbles.



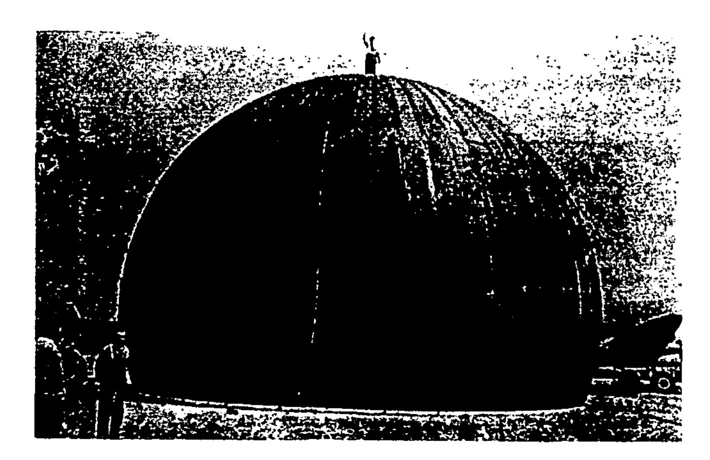
Fonctionnement et sollicitations d'un élément de membrane pneumatique



Schématisation en remplaçant l'élément de membrane par deux câbles

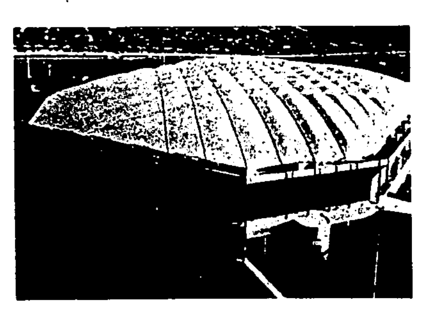
Les premières structures de ce type ont été construites juste après la Seconde Guerre mondiale par W. Bird dans le but de protéger des équipements radar. Dans ce cas aussi, le développement a été rendu possible par l'introduction de matériaux suffisamment résistants. L'absence de façades rend l'ampleur des déformations pratiquement irrelevante, et il est donc possible d'employer des matériaux avec un module d'élasticité bas. On utilise en effet souvent des fibres de Nylon recouvertes par du caoutchouc néoprène.

Puisque la fonction portante est exercée par la pression d'air interne, il est indispensable de garantir cet effet en permanence. Les dimensions de ces structures et la présence d'accès rendent pratiquement impossible une imperméabilité absolue. C'est pourquoi il est indispensable de pomper en permanence de l'air à l'intérieur. Il s'agit donc de structures qui exigent une alimentation constante en énergie pour pouvoir fonctionner.



« Radom », 1946, ing. W. Bird

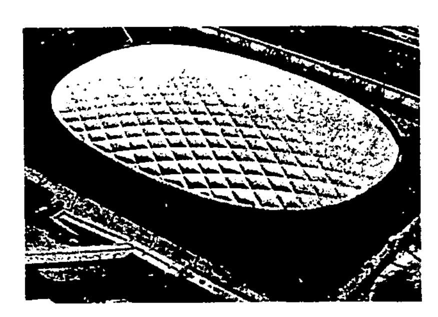
Les structures de ce type sont souvent caractérisées par un bas rapport d'élancement ℓ/f. Dans ces cas, il est indispensable de renforcer la membrane pneumatique par une série de câbles. Les deux faisceaux de câbles ont une fonction de prétension et poussent la membrane vers le bas, en opposition à la pression interne de l'air. De cette façon, on peut obtenir des portées très importantes. Dans le Pontiac Silverdome illustré ci-contre, une membrane de ce type couvre un stade de 80000 personnes.



Pontiac Silverdome, 1975, arch. O'Dell Hewlett & Luckenbach, ing. D. Geiger (ℓ = 216 × 162 m, f = 15,2 m)

Les membranes pneumatiques à haute pression

Les membranes pneumatiques à haute pression ont un fonctionnement fondamentalement différent des structures décrites précédemment. Pour comprendre intuitivement leur mode de fonctionnement, il suffit de penser aux bouées et aux matelas pneumatiques gonflables. En réalité, le fonctionnement statique de ces structures se rapproche de celui des poutres que nous traiterons par la suite.
L'exemple ci-dessous montre une des rares applications structurales de ce système.



Pavillon des Etats-Unis à l'exposition universelle d'Osaka, 1970, arch. L. Davis, S. Brody, S. Chermayer, Geismer et Harak, Ing. D. Geiger



Pavillon des orchidées à Mukôgaoka près de Tokyo, 1987, arch. Y. Murata, ing. M. Kawaguchi







Pavillon Fuji à l'exposition universelle d'Osaka, 1970, arch. Y. Murata, ing. M. Kawaguchi



Les arcs

Les structures sollicitées à la compression

La prochaine étape de notre parcours consiste en l'étude des structures sollicitées à la compression, que nous avons déjà abordées avec l'exemple de l'homme qui s'appuie contre le mur, évoquant sa similitude avec l'arc-boutant des cathédrales gothiques.

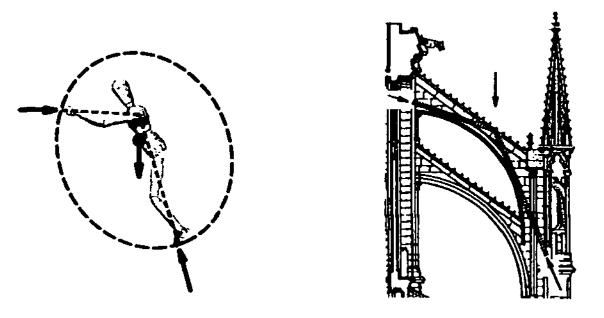
Si nous analysons comment la charge est reprise dans ces deux cas spécifiques, par exemple en considérant un sous-système qui contient la structure à proximité de la charge appliquée, et si nous comparons son fonctionnement avec celui des structures sollicitées à la traction, nous constatons qu'il existe de fortes analogies.

Dans toutes les structures sollicitées à la traction, la structure reprend la charge en se déplaçant jusqu'à ce que la force de déviation des sollicitations, dont les lignes d'action correspondent aux segments de câbles, corresponde à la charge même.

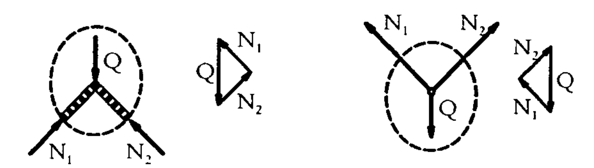
Dans les deux exemples illustrés avec une sollicitation de compression, la charge est encore en équilibre avec les deux sollicitations qui sont déviées, mais la forme que la structure doit prendre est différente. Dans ce cas, la forme a une concavité vers le bas. Si nous complétons la structure soumise à une seule charge en introduisant les appuis, nous obtenons une configuration fort semblable à celle d'un câble. L'analyse des sollicitations et des réactions d'appui peut être facilement effectuée avec l'aide des sous-systèmes et du diagramme de Cremona. Celui-ci présente également de fortes analogies avec le diagramme des câbles. Si la structure sollicitée à la compression a le même rapport d'élancement ℓ/f que celui des câbles, de sorte que les pentes des barres sont identiques, la longueur des vecteurs représentés dans les deux diagrammes de Cremona est également identique. On peut donc déduire que:

- les forces verticales sur les appuis sont identiques à celles du câble;
- les forces horizontales sur les appuis ont la même intensité, mais sont orientées en sens inverse;
- les sollicitations ont elles aussi la même intensité, mais sont de compression au lieu de traction.

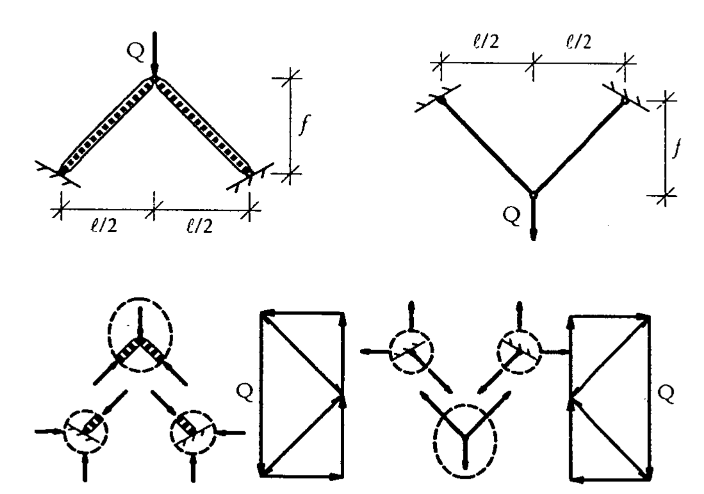
Si nous introduisons le changement de signe, les équations dérivées pour le câble (cf. p. 36) sont donc encore valables.



Deux exemples de structures sollicitées à la compression



Reprise des charges par des structures sollicitées à la compression et à la traction



Structure sollicitée à la compresesion, câble avec le même rapport ℓ/f, Sous-systèmes et diagramme de Cremona pour une structure comprimée et une structure tendue

Cas avec plusieurs charges et charges uniformément réparties: les arcs

L'analogie entre les câbles et les structures sollicitées à la compression est valable indépendamment du type de charge. Le polygone funiculaire garde toute son importance dans les structures sollicitées à la compression: la forme idéale d'un arc est identique à celle d'un câble sollicité par les mêmes charges, mais simplement renversée. Ci-contre sont représentés quelques exemples avec plusieurs charges ou avec des charges uniformément réparties.

L'arc parabolique

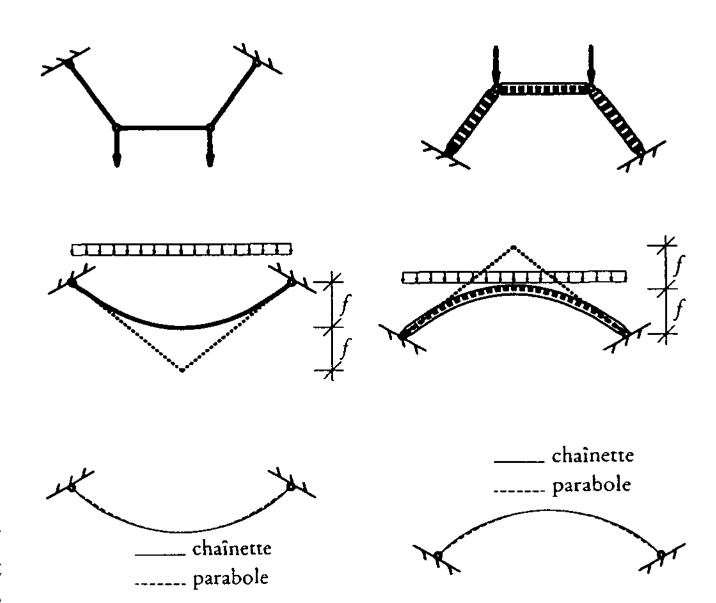
Si la charge est uniformément répartie, la forme du polygone funiculaire est encore une parabole. Dans ce cas aussi, les formules dérivées pour le câble (cf. la page 42), une fois modifiés les signes des sollicitations, restent valables.

L'arc en forme de chaînette

Si la charge est uniformément répartie, mais sur la longueur de l'arc au lieu de l'horizontale, la forme que l'on obtient est la courbe de la chaînette. Comme nous l'avons déjà vu, cette courbe est fort semblable à la parabole. Elles se distinguent surtout à proximité de la naissance des arcs (c'est-à-dire dans les zones des appuis) où, à cause de la plus forte pente, la charge appliquée est plus grande quand on la mesure selon l'horizontale.

Dans les arcs, la section est souvent adaptée à la sollicitation. Etant donné que cette dernière augmente en se rapprochant de la naissance des arcs, l'intensité des charges permanentes est plus grande dans ces zones. Le polygone funiculaire subit par conséquent une augmentation de courbure à proximité de la naissance des arcs, non seulement par rapport à la parabole, mais aussi par rapport à la chaînette.

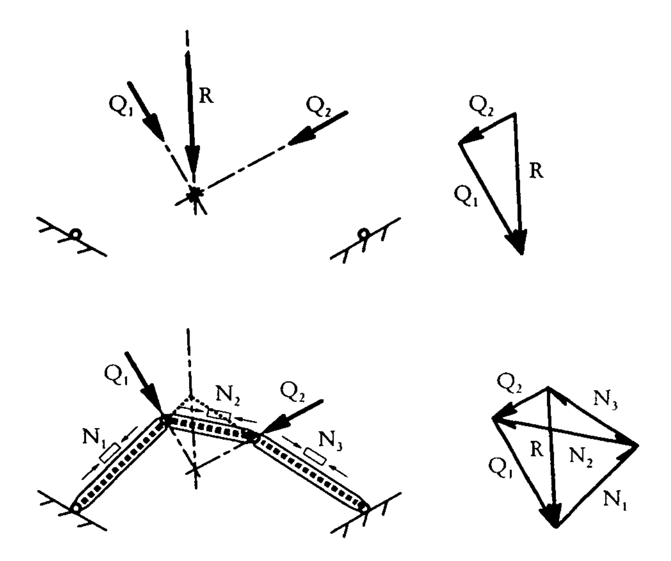
Dans l'exemple illustré ci-contre, la variation de section qui a comme effet une nouvelle augmentation de la charge permanente apparaît clairement. Comme nous le verrons par la suite, cette variation d'épaisseur ne constitue pas seulement une réponse à la répartition des efforts normaux, mais permet aussi d'améliorer le comportement de la structure soumise aux charges variables.



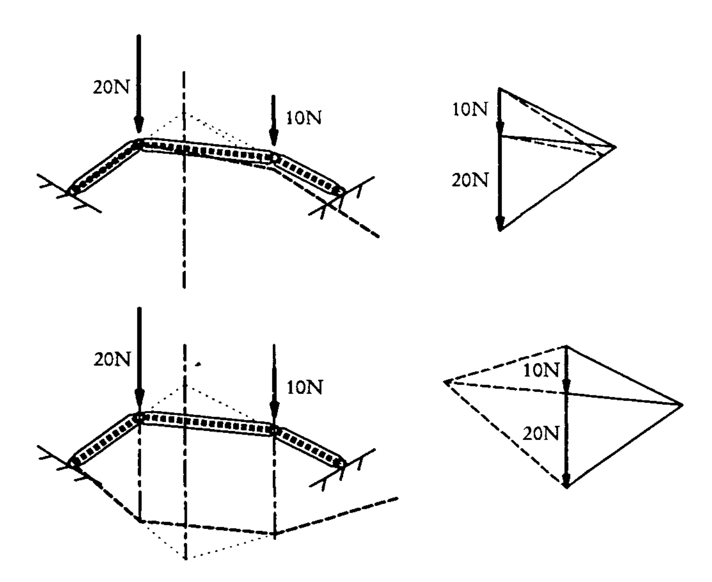
Analogie entre câble et arcs, cas avec deux charges symétriques, cas avec charge uniformément répartie selon l'horizontale (parabole) et le long de la structure (chaînette)



Arc de St. Louis, 1965, arch. E. Saarinen, ing. F. N. Severud (ℓ = 192 m, f = 192 m, ℓ/f = 1,00)



Détermination de la forme de l'arc funiculaire et des efforts, sous l'effet de charges dans n'importe quelle direction



Détermination de la forme de l'arc funiculaire et des efforts sous l'effet de charges parallèles non symétriques; procédé avec un arc auxiliaire et avec un câble auxiliaire (l'arc auxiliaire, le câble auxiliaire et les vecteurs correspondants dans le diagramme de Cremona sont représentés en traitillé, alors que les polygones funiculaires qui se réfèrent à la résultante des charges sont représentés en pointillé)

L'arc avec des charges concentrées dans n'importe quelle direction

Si plusieurs charges agissent sur un arc dans des directions quelconques, le procédé pour déterminer la forme de l'arc, les sollicitations et les forces sur les appuis est identique au procédé adopté pour les câbles. En présence de plus de deux charges, on détermine tout d'abord la résultante qui peut être trouvée en sommant les deux premières charges et en ajoutant les charges restantes une à une. Ensuite, on passe au choix d'un arc composé de deux barres en mesure de reprendre la résultante des charges. En analysant un sous-système qui n'inclut que la première charge, on peut déterminer comment l'arc doit être dévié, puis on répète cette opération charge après charge de façon à compléter la construction de la géométrie.

L'arc avec des charges parallèles, mais non symétriques

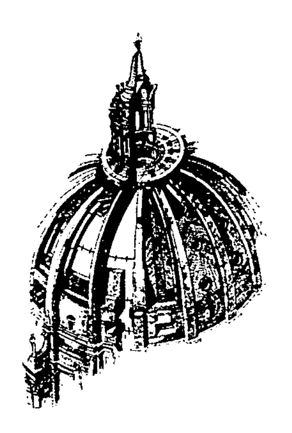
Si toutes les charges sont parallèles, le procédé décrit précédemment ne peut pas être appliqué, car les lignes d'action se rencontrent à l'infini. Dans ce cas, comme dans le cas du câble, on peut commencer par le diagramme de Cremona en analysant un polygone funiculaire auxiliaire qui ne respecte pas nécessairement les conditions géométriques aux appuis. Dans ce cas, nous parlerons d'un *arc auxiliaire*. Une fois la résultante trouvée, le procédé est identique à celui adopté dans le cas précédent.
Puisque l'arc auxiliaire ne sert qu'à déterminer la résultante, cette opération peut être aussi effectuée avec l'aide d'un câble auxiliaire.

L'analogie entre câbles et arcs

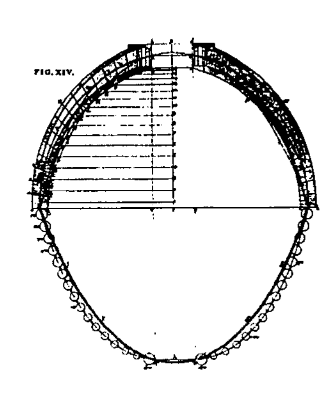
L'analogie entre les structures sollicitées à la traction (câbles) et les structures sollicitées à la compression (arcs) a été souvent utilisée pour faciliter la compréhension du fonctionnement des arcs.

Jusqu'au XVIIIe siècle, de nombreux constructeurs ont cherché une règle pour déterminer la forme à donner aux arcs pour répondre au mieux aux exigences statiques. Les solutions étaient pour la plupart empiriques: le résultat était trouvé au moyen de maquettes et l'expérience jouait un rôle déterminant. C'est seulement avec l'étude des systèmes funiculaires que l'on commença vers la fin du XVIIIe siècle à formuler correctement le problème. Le thème devint d'actualité avec l'intérêt des mathématiciens de l'époque (Leibnitz, Johann et Jacob Bernoulli). La première application pratique est due au mathématicien et ingénieur Giovanni Poleni qui, chargé de vérifier la stabilité de la coupole de Saint-Pierre de Rome et d'expliquer la cause des fissures qui s'étaient formées, analysa une des nervures. Pour ceci, il utilisa une maquette composée d'un câble sollicité par des sphères, chacune ayant un poids proportionnel au poids du voussoir qu'elle représente. La figure ci-contre montre cet exemple, avec la construction originale du polygone funiculaire.

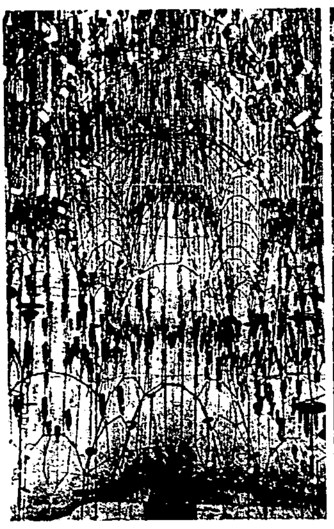
La facilité avec laquelle on peut réaliser des maquettes de câbles, et le fait que celles-ci se disposent automatiquement selon les polygones funiculaires, ont souvent conduit les architectes et les ingénieurs à chercher la forme à donner aux arcs en utilisant l'analogie entre les deux structures, analogie qui est ainsi devenue une aide importante pour le projet.



Coupole de Saint-Pierre à Rome, env. 1585, arch. G. Della Porta et D. Fontana, (ℓ = 42 m, f = 26 m)



Analyse de G. Poleni avec la statique graphique et l'analogie avec le câble (*Memorie istoriche della gran cupola del tempio vaticano*, 1748)

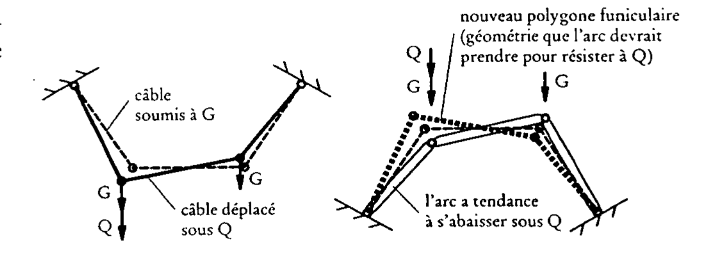


Maquette funiculaire de la chapelle de la Colonie Güell près de Barcelone (figure renversée), 1898-1915, arch. A. Gaudì

Croquis de la structure portante composée d'arcs

L'influence des charges variables

Si plusieures charges qui varient de façon non proportionnelle agissent sur un câble, on obtient, comme nous l'avons vu, une variation du polygone funiculaire. Si nous considérons l'exemple ci-contre, nous constatons que sous l'influence de la charge variable Q le câble se déplace en se rapprochant du nouveau polygone funiculaire, jusqu'à le rejoindre. Dans le cas des câbles, le seul effet est donc lié à l'état limite de service à cause des déplacements, alors qu'une position d'équilibre peut toujours être trouvée.



Effet des charges variables sur les câbles et sur les arcs: déformation et instabilité

L'instabilité des arcs

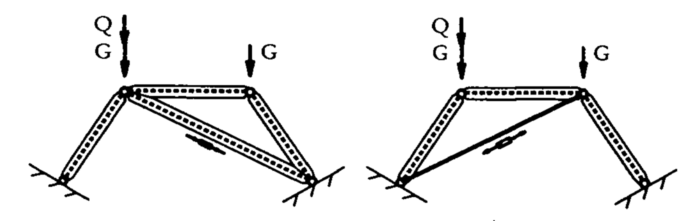
Si nous analysons le cas analogue d'une structure sollicitée à la compression, une différence fondamentale apparaît de façon évidente: avec l'augmentation de la charge variable Q, les barres à proximité de la charge tendent à s'abaisser, alors que le nouveau polygone funiculaire se déplace vers le haut. En effet, ceci est le seul mode qui permette à la déviation de l'effort d'augmenter pour compenser la charge supplémentaire. Sans une intervention externe, par exemple en poussant l'arc vers le haut jusqu'à rejoindre le nouveau polygone funiculaire, il n'est plus possible d'atteindre l'équilibre parce que la structure s'éloigne de sa position d'équilibre, même sous l'effet d'une charge variable supplémentaire infinitésimale. Dans ce cas, on constate donc un phénomène d'*instabilité*. Dans le cas des arcs, ce problème est lié à l'état limite ultime: une instabilité de ce type provoque l'écroulement de la structure. L'introduction de dispositifs constructifs pour stabiliser les arcs est donc absolument indispensable.

"arc de prétension"

Augmentation de la charge permanente ou introduction d'un élément de prétension: les deux solutions n'améliorent pas la stabilité de l'arc

Procédés pour stabiliser les arcs

Dans le cas des câbles, pour une charge variable donnée, on peut réduire le déplacement en augmentant l'intensité de la charge permanente, puisque la déviation du polygone funiculaire est fonction du rapport entre les deux types de charge. En réalité, dans les arcs aussi, un tel procédé réduirait le déplacement du polygone funiculaire; mais puisque même avec une déviation très petite l'équilibre ne peut en aucun cas être atteint sans une intervention externe, l'écroulement resterait inévitable.
C'est pourquoi une solution avec un élément de prétension, analogue à la solution adoptée dans le cas des câbles, ne conduit à aucune augmentation de la stabilité de l'arc.

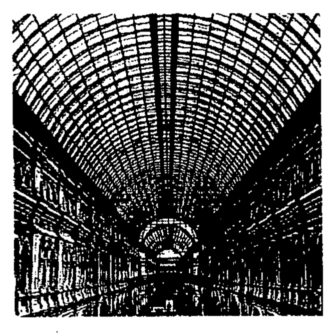


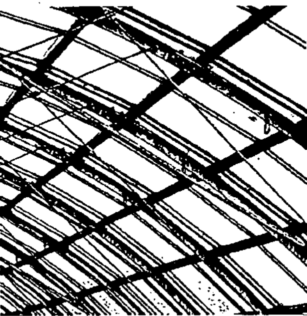
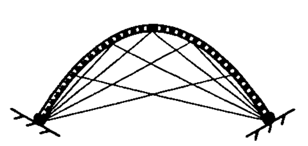
Barres ajoutées pour stabiliser l'arc

Adjonction de barres stabilisatrices

Comme nous l'avons montré précédemment (cf. p. 52), un câble porteur peut être rendu plus stable en ajoutant une série de câbles stabilisateurs. L'adjonction de barres peut également constituer un procédé efficace pour améliorer la stabilité des arcs. Les exemples illustrés ci-contre montrent le cas d'un arc chargé par deux forces concentrées: dans ce cas, la stabilité requise peut être atteinte en insérant soit un câble supplémentaire soit un buton. Le buton supplémentaire est en mesure d'empêcher le déplacement vers le bas là où agit la charge variable. Puisque l'arc tend à se soulever dans la zone la moins chargée, l'ajout d'un câble, qui retient l'arc dans cette zone et empêche ce soulèvement, peut aussi garantir la stabilité de la structure.

L'équilibre de ces structures, facilement analysable au moyen de sous-systèmes, sera étudié plus loin.
Si l'arc est soumis à plusieurs charges, d'autres barres peuvent être ajoutées. On utilise habituellement des câbles stabilisateurs, de façon à obtenir une structure légère et transparente. Les exemples ci-contre montrent deux arcs extrêmement minces dont la stabilité requise est garantie par une série de câbles fixés aux appuis de l'arc.

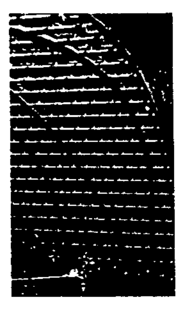
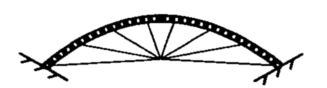


Toiture des grands magasins GUM à Moscou, 1889-93, ing. V. Suchov

L'introduction d'une poutre de raidissement

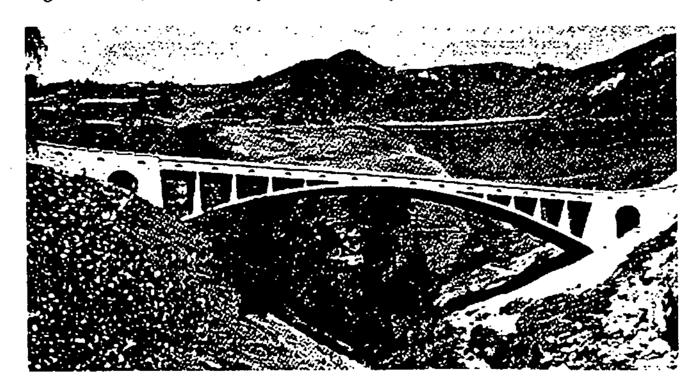
La solution qui fait appel à une poutre de raidissement, qui est utilisée avec les câbles surtout dans le cas des ponts suspendus, peut servir aussi pour rigidifier un arc. Dans ce cas, le fonctionnement se base sur deux principes: d'une part la poutre répartit les charges concentrées et d'autre part elle s'oppose à des déplacements importants qui contribueraient à éloigner la géométrie de l'arc du polygone funiculaire des charges.
Dans le pont en arc représenté ci-dessous, grâce à l'effet du tablier qui exerce la fonction de poutre de raidissement, l'arc en béton armé a une stabilité suffisante malgré une épaisseur au faîte de seulement 23 cm.

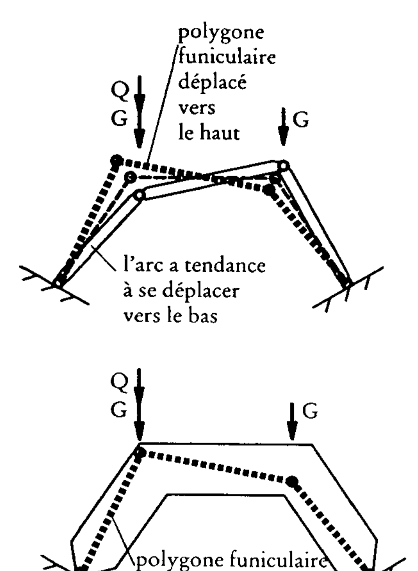
Toiture de la gare de Coire, 1988, arch. R. Obrist + R. Brosi, ing. P. Rice, (ℓ = 52,10 m, f = 10,00 m, ℓ/f = 5,2)

Le raidissement de l'arc par augmentation de l'épaisseur

Dans le cas de l'arc composé simplement d'une série de barres disposées le long du polygone funiculaire des charges permanentes, si on ajoute une charge variable quelconque, il y a en réalité deux phénomènes qui causent l'instabilité:
- l'arc se déplace dans la direction de la charge variable là où celle-ci est appliquée (avec des charges vers le bas, l'arc s'abaisse) et
- le polygone funiculaire se déplace dans la direction opposée (dans la zone des charges les plus grandes, l'arc devrait remonter pour rejoindre la position d'équilibre).



Pont sur la Val Tschiel (GR/CH), 1925, ing. R. Maillart (ℓ = 43,20 m, f = 5,20 m, ℓ/f = 8,3)



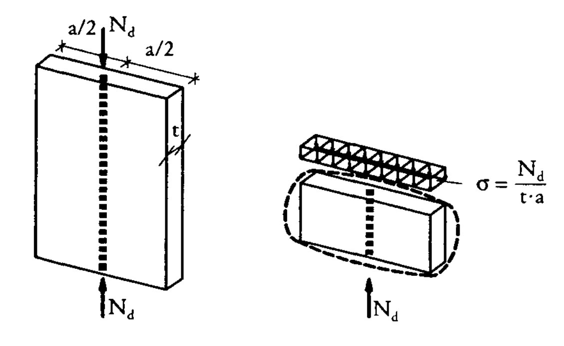
Raidissement de l'arc par augmentation de l'épaisseur: les déplacements sont réduits et le polygone funiculaire peut se déplacer à l'intérieur du matériau

Il se produit donc un éloignement entre les deux configurations, et la position d'équilibre ne peut pas être atteinte sans une intervention extérieure.

Une solution structurale pour résoudre le premier problème consiste à combiner la poutre de raidissement décrite dans la solution précédente avec l'arc, obtenant ainsi une structure en mesure de s'opposer aux déplacements. Ceci peut être obtenu en augmentant l'épaisseur de l'arc et en éliminant les articulations. Avec ce procédé, on résout automatiquement le second problème: si l'arc a une épaisseur suffisamment grande, le nouveau polygone funiculaire pourra se former à son intérieur, sans que l'arc doive se déplacer pour suivre la position du polygone funiculaire. Ce n'est donc pas l'arc avec sa forme qui s'adapte au polygone funiculaire (qui se déplace de toute façon sous l'effet des charges variables), mais la ligne d'action des efforts internes, qui doit toujours coïncider avec le polygone funiculaire des charges qui se déplace à l'intérieur de la structure.

La ligne d'action des efforts

Dans les câbles, mais aussi dans les colonnes traitées jusqu'ici, la ligne d'action des efforts internes coïncidait toujours avec l'axe de gravité des sections. Ceci avait pour conséquence que les contraintes avaient une intensité constante dans les sections. Dans l'arc décrit ci-dessus, la ligne d'action se déplace en revanche librement à l'intérieur du matériau. Pour mieux comprendre cette situation, considérons un exemple avec un élément prismatique sollicité à la compression. Si la ligne d'action des deux forces appliquées, et donc aussi des efforts internes, passe par le centre de gravité des sections, les contraintes à l'intérieur du matériau sont réparties de façon uniforme sur toute la section, comme on le constate dans les sous-systèmes ci-contre.

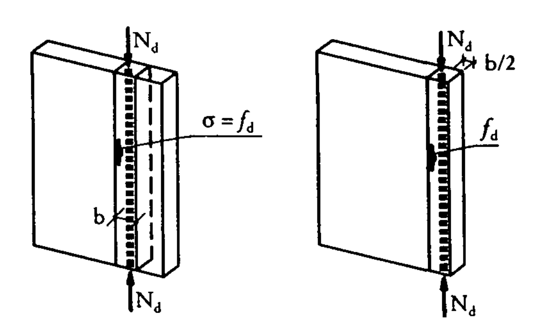


Ligne d'action des efforts correspondant à l'axe de gravité des sections

Si, par contre, nous déplaçons la ligne d'action des forces et des efforts, nous aurons certainement une répartition différente des contraintes dans le matériau. Nous n'approfondirons pas la distribution exacte des contraintes, (problème de mécanique et résistance des matériaux), mais nous chercherons à comprendre quelle est la limite que la ligne d'action des efforts peut atteindre avant de causer une rupture quand nous sommes en présence d'un matériau résistant seulement à la compression (comme c'est le cas de la maçonnerie).

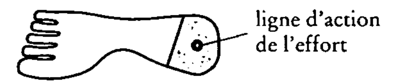
Tout matériau se rompt quand il atteint sa résistance, définie comme une contrainte limite de traction ou de compression. Nous pouvons alors déterminer la quantité minimale de matériau nécessaire pour résister à l'effort de compression dans notre élément. Le critère de l'état limite ultime nous

permet de trouver la surface nécessaire (cf. p. 23). Celle-ci est définie par l'équation $A_{néc.} = N_d/f_d$ où N_d est l'effort majoré par les facteurs partiels de sécurité, et f_d est la résistance réduite du matériau. Dans notre élément prismatique, nous pouvons imaginer une zone ayant l'épaisseur du matériau t pour une largeur $b = A_{néc.}/t$ qui résiste à l'effort N_d, alors que tout le reste de la section n'est pas sollicité. Il s'agit bien sûr d'une simplification qui nous permettra toutefois de comprendre le fonctionnement de structures sollicitées de cette façon. D'autre part, si le matériau possède une ductilité suffisante, cette approche n'est pas une approximation, mais représente simplement un cas limite, selon la théorie de la plasticité. De cette façon, nous pouvons déterminer la résistance effective de la structure.
La ligne d'action de l'effort peut donc se rapprocher de la surface du matériau, jusqu'à atteindre une distance minimale égale à la moitié de l'épaisseur minimale b de la zone comprimée.
Si la ligne d'action se rapproche encore de la surface, l'aire sollicitée diminue, et on aura par conséquent une augmentation de contrainte qui conduit à la rupture du matériau. Evidemment, le cas où la ligne d'action se trouve au dehors du matériau est également impossible. La situation serait semblable à celle de l'homme qui tombe du fait que, en négligeant les forces d'inertie, la ligne d'action de la force de gravitation sort hors de la plante de ses pieds (cf. p. 6). Toutefois, suite à ce que nous venons de voir, la position de la ligne d'action à l'intérieur de la plante des pieds n'est pas une condition suffisante. Il est en effet indispensable d'avoir une aire de contact sous le pied en mesure de reprendre l'effort de compression, et par conséquent la ligne d'action devra passer par le centre de gravité de cette aire. Puisque l'effort, le poids de la personne, est limité, l'aire sollicitée est elle aussi très petite, et par conséquent la résultante peut être très proche du bord. La situation est différente si nous marchons sur un terrain mou et qui a tendance à céder. Dans ce cas, la résistance du terrain devient déterminante, et l'aire nécessaire pour transmettre l'effort de compression peut occuper une bonne partie de la plante des pieds. C'est pour cette raison que le risque de tomber est bien plus grand lorsque nous nous déplaçons sur le sable fin d'une plage que lorsque nous marchons sur une surface dure.

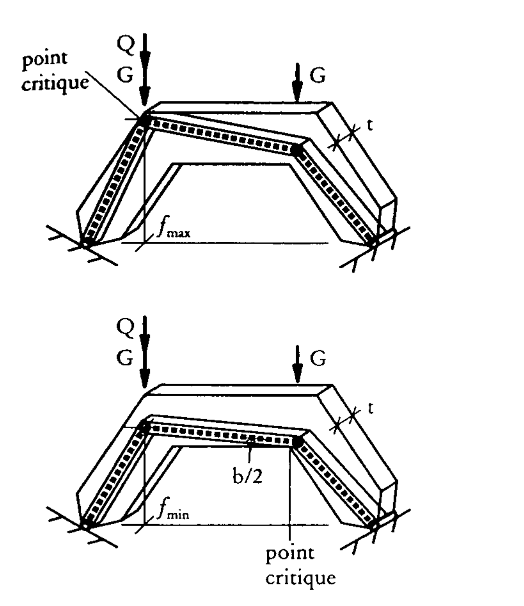


Ligne d'action des efforts excentriques

situation avec excentricité maximale



Aire nécessaire pour transmettre l'effort de compression au terrain, et position de la ligne d'action de l'effort



Polygone funiculaire et zone sollicitée de l'arc: limite avec flèche maximale et limite avec flèche minimale

Les lignes d'action possibles des efforts à l'intérieur d'un arc

Si nous revenons à notre arc, nous constatons que le polygone funiculaire peut se rapprocher dangereusement du bord, soit au voisinage des charges G + Q à gauche, soit de la charge G à droite. Nous constatons d'autre part, étant donné la géométrie de l'arc et la configuration de charges G et Q, qu'il est possible de tracer un nombre infini de polygones funiculaires situés entre les deux cas limites pour lesquels le polygone funiculaire atteint la distance de sécurité b/2 en l'un des deux points critiques. En d'autres termes, la flèche effective f est limitée par les deux valeurs f_{max} et f_{min}. On peut observer que cette indétermination n'a rien à voir avec le choix de la flèche que nous avions effectué avec les câbles. Dans ce cas, il s'agissait en effet d'un choix qui faisait partie du projet, alors que maintenant, l'indétermination dont nous parlons dépend de l'épaisseur de l'arc, à l'intérieur de laquelle peuvent s'établir des polygones funiculaires avec une flèche légèrement supérieure ou légèrement inférieure à la flèche nominale, qui se mesure habituellement par rapport à la ligne médiane.

Les arcs hyperstatiques et les arcs isostatiques

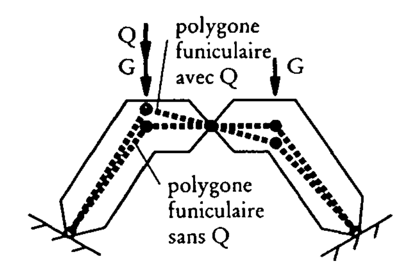
Une structure dans laquelle peuvent s'établir une infinité de lignes d'action des efforts est appelée *structure hyperstatique*. Nous apprendrons par la suite à distinguer ces structures des structures isostatiques, dans lesquelles, pour une configuration définie des charges, il n'existe qu'un seul polygone funiculaire. En réalité, dans une structure hyperstatique également, il ne peut s'instaurer qu'un seul état de sollicitation, qui peut être décrit par un polygone funiculaire avec une flèche f bien définie. Pour la détermination de ce polygone funiculaire, il est toutefois nécessaire de faire appel, en plus des conditions d'équilibre que nous avons étudiées jusqu'ici, à d'autres considérations liées au comportement du matériau, à sa déformation et aux conditions de bord. Une structure de ce type est influencée, par exemple, par les variations de température, par les déplacements des appuis et par d'éventuelles déformations plastiques du matériau. Nous laisserons de côté ces effets, et nous étudierons le fonctionnement de ces structures en considérant les deux polygones funiculaires extrêmes avec leurs flèches maximale et minimale.

L'arc à trois articulations

Le fait que les sollicitations puissent dépendre des déplacements des appuis doit être considéré comme un problème sérieux si l'arc est fondé sur des terrains mouvants. De plus, surtout dans le passé, quand les instruments de calcul à disposition de l'ingénieur étaient moins raffinés que les instruments actuels, l'influence des autres facteurs cités ci-dessus a également été considérée comme un gros obstacle à l'analyse des arcs hyperstatiques. C'est pourquoi les ingénieurs ont cherché à rendre ces arcs isostatiques en introduisant ce que nous appelons une *articulation*. Il s'agit d'une interruption de la structure avec l'insertion d'un mécanisme en mesure de transmettre les efforts entre deux parties adjacentes de l'arc. Cette solution constructive, qui permet aux deux parties de la structure de pivoter librement l'une par rapport à l'autre, introduit un point fixe au travers duquel le polygone funiculaire doit impérativement passer.

Il faut observer que dans les arcs traités jusqu'ici, les appuis aussi sont caractérisés par la présence d'articulations. C'est pourquoi les structures de ce type avec en plus une articulation au faîte sont appelées arcs à trois articulations.

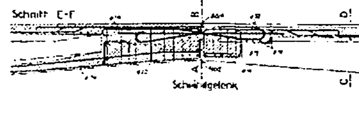
Les figures ci-contre montrent deux types d'articulations. Dans l'exemple à gauche représentant un arc métallique, l'articulation est formée par un véritable appareil mécanique, avec un pivot qui permet la rotation libre d'une partie de l'arc par rapport à l'autre. Dans le second exemple, typique d'un pont en béton armé, l'articulation est en revanche le résultat de l'affaiblissement obtenu par deux découpes dans le matériau. La zone restante, où sont transmis les efforts de compression, est renforcée par une robuste armature en acier.

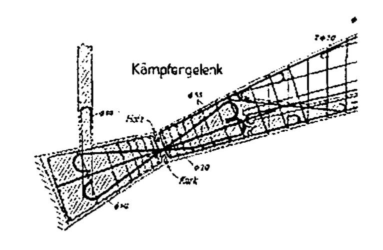


Déplacement du polygone funiculaire en un arc à trois articulations sous l'effet de la charge variable



Viaduc du Garabit dans le Cantal, France, 1884, ing. M. Koechlin (Ateliers Eiffel), ($\ell = 165$ m), articulation à la naissance de l'arc

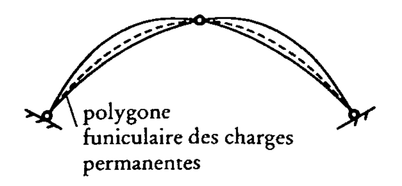




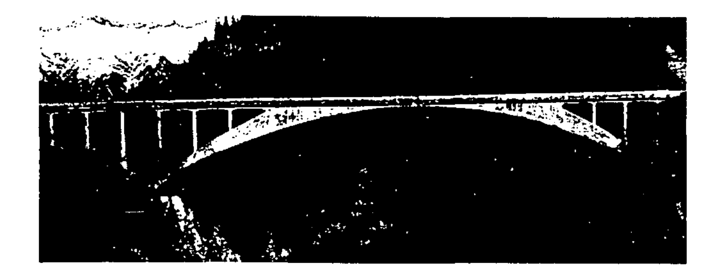
Pont sur l'Arve à Vessy (Genève), 1936, ing. R. Maillart, ($\ell = 55{,}97$ m, $f = 4{,}77$ m, $\ell/f = 11{,}7$), articulations au faîte et à la naissance de l'arc

La forme optimale d'un arc à trois articulations

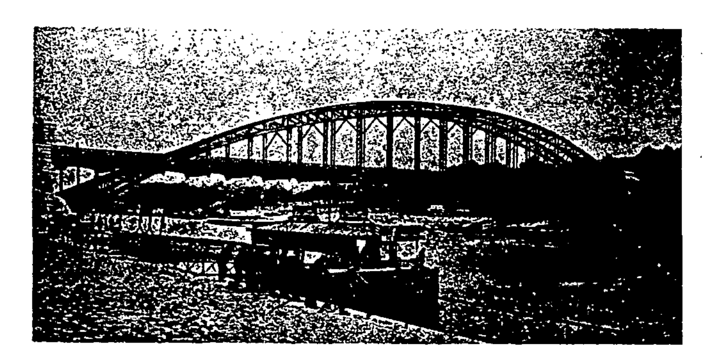
Si on décide d'augmenter l'épaisseur de l'arc pour le stabiliser, on peut aussi limiter cette intervention aux seules zones critiques. Dans certaines zones, le polygone funiculaire peut subir de grandes variations sous l'effet des charges variables, alors que dans d'autres zones, surtout à proximité des trois articulations, la variation sera minime. Il peut donc être raisonnable, par exemple pour économiser le matériau, de faire varier l'épaisseur en fonction des exigences statiques. Dans ce cas, le projet de la forme statiquement correcte peut être subdivisé en deux phases. Dans une première phase, on détermine la forme générale de l'arc sur la base du polygone funiculaire des charges permanentes et on choisit la flèche (habituellement la portée est donnée). Dans un deuxième temps, on détermine l'épaisseur de l'arc sur la base des variations du polygone funiculaire causées par les charges variables.



Forme optimale d'un arc à trois articulations avec charge permanente uniformément répartie et charge variable concentrée



Pont sur le Salginatobel près de Schiers (GR/CH), 1930, ing. R. Maillart, (ℓ = 90,04 m, f = 12,99 m, ℓ/f = 6,9)



Viaduc d'Austerlitz sur la Seine à Paris, 1904, arch. C. Formigé, ing. L.Biette, (ℓ = 107,50 m)

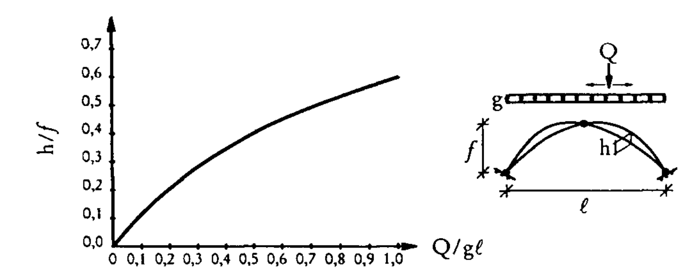
L'exemple ci-contre représente un arc soumis à une charge permanente d'intensité constante. La forme générale la plus appropriée est par conséquent celle de la parabole, qui correspond à la courbe funiculaire des charges permanentes. Sous l'effet d'une charge variable concentrée qui peut agir en n'importe quel point de l'arc, on obtiendra une série de courbes funiculaires, qui passent toutes par les trois articulations de l'arc. Si on trace la courbe enveloppe des courbes funiculaires, et si on ajoute une portion de matériau suffisante pour reprendre l'effort de compression, on obtient la dimension minimale de l'arc en mesure de reprendre les charges sans effort de traction.

Le pont sur le Salginatobel représenté ci-contre est un exemple typique de la forme que l'on obtient par ce procédé. Il faut observer l'analogie de cette forme avec celle du *Tower Bridge* (cf. p. 55). Dans ce cas, la forme avait été obtenue en superposant deux câbles: le premier avec la fonction de reprendre les charges agissant sur la moitié de la portée, le second pour les charges restantes. En réalité, dans le cas de l'arc à trois articulations, on pourrait également adopter une démarche semblable qui conduirait au même résultat: les divers arcs superposés ne sont rien d'autre que les polygones funiculaires dérivant des charges variables sur les deux parties de l'arc.

Dans le viaduc d'Austerlitz sur la Seine, reproduit ci-contre, l'arc est constitué par une structure réticulaire en acier, et l'analogie avec le *Tower Bridge* de Londres est encore plus évidente. Dans ce cas, étant donné que le tablier du pont est en-dessous de l'arc, la charge est transmise à l'arc non pas au moyen de piliers, comme cela est habituellement le cas, mais au moyen de tirants. Le fonctionnement est toutefois identique à celui des ponts avec tablier supérieur et avec transmission directe des charges. Une autre particulairté de ce pont réside dans la position des deux articulations à la naissance de l'arc, qui ne sont pas situées au droit des appuis. La forme de l'arc, qui suit le critère de la meilleure efficacité structurale, est similaire à la forme construite précédemment dans la zone comprise entre les deux articulations à la naissance. Dans les deux segments entre les appuis et les articulations à la naissance, l'épaisseur a été modifiée elle aussi, de façon à permettre le déplacement du polygone funiculaire à l'intérieur de l'arc, ce qui conduit à avoir la largeur maximale au droit des appuis.

L'épaisseur nécessaire d'un arc à trois articulations sollicité seulement à la compression

Comme nous l'avons vu, en faisant l'hypothèse que le matériau résiste uniquement à la compression, l'épaisseur nécessaire de l'arc résulte de l'excentricité du polygone funiculaire provoquée par la charge variable et de la zone de matériau nécessaire pour résister à l'effort de compression.
Si nous négligeons ce dernier effet, et si nous considérons uniquement le déplacement du polygone funiculaire, nous aurons une situation fort semblable à celle provoquée par le déplacement des câbles sous l'effet des charges variables (cf. p. 49). Comme dans le câble, l'épaisseur nécessaire dépend de deux paramètres: l'élancement ℓ/f et le rapport entre charge variable et charge permanente. En effet, l'épaisseur de l'arc peut être exprimée en fonction de la flèche f et du rapport entre les deux charges, comme représenté dans le graphe ci-contre. En diminuant la flèche f et en augmentant l'élancement ℓ/f, l'épaisseur nécessaire diminue, alors qu'en augmentant la charge variable on a l'effet inverse. Il faut observer que ce que nous venons de décrire n'est valable que si le matériau résiste seulement à la compression (c'est le cas des arcs en maçonnerie ou en béton non armé). Si la structure est construite en béton armé, en métal ou en bois, il peut alors s'établir aussi des efforts de traction, et le fonctionnement sera différent de ce que nous avons décrit jusqu'ici.



Largeur h nécessaire pour reprendre une charge variable concentrée en fonction de la flèche f et de la valeur $Q/g\ell$ (arc à trois articulations, sans aucune résistance à la traction)

Les arcs construits avec des matériaux résistant à la traction

La photo ci-contre représente un pont très élancé qui, probablement, ne satisfait pas le critère de l'épaisseur minimale nécessaire pour empêcher que le polygone funiculaire sorte de la section. Nous verrons par la suite comment, si des efforts de traction peuvent être repris à l'intérieur de l'arc, le polygone funiculaire peut parfois sortir de la section. L'épaisseur de l'arc ne doit alors pas nécessairement suivre l'enveloppe des courbes funiculaires possibles résultant des diverses combinaisons des charges variables, et elle peut par conséquent être fortement réduite.
Il faut dans tous les cas tenir compte du fait que l'instauration d'efforts de traction, due à la sortie du polygone funiculaire de la section, est accompagnée d'une augmentation générale des efforts, de sorte que la quantité de matériau nécessaire augmente elle aussi. C'est pourquoi on cherche en général à limiter cette situation, en projetant l'arc de façon que sa forme générale corresponde au moins approximativement à celle du polygone funiculaire des charges permanentes. On choisira d'autre part l'épaisseur de l'arc en tenant compte de deux critères. Il faut avant tout garantir une rigidité suffisante, de façon que la structure ne se déforme pas

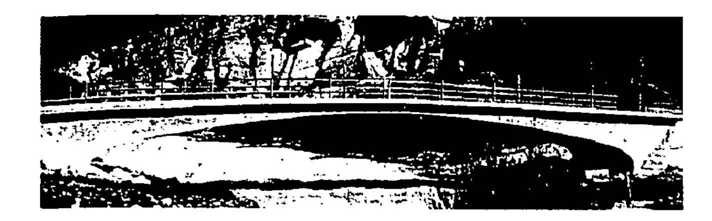


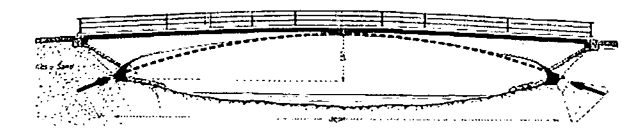
Pont Alexandre III sur la Seine à Paris, 1900, ing. J. Résal (ℓ = 107,5 m, f = 6,30 m, ℓ/f = 17)

trop sous l'influence des charges variables et qu'elle ne s'éloigne pas de la position originale (nous traiterons plus loin ce phénomène appelé stabilité). En second lieu, l'épaisseur de la section doit être suffisante pour reprendre les efforts de compression et de traction qui peuvent apparaître sous l'effet des charges variables.

Les arcs dont la forme ne correspond pas à celle du polygone funiculaire des charges permanentes

Si des conditions particulières l'exigent, l'emploi de matériaux résistant à la traction comme le béton armé, l'acier et le bois permet de choisir une forme de l'arc qui s'éloigne également de celle du polygone funiculaire des charges permanentes. Dans ce cas, on obtiendra une structure appelée *cadre ou portique* qui est en conséquence beaucoup moins efficace que l'arc funiculaire.
L'exemple reproduit ci-contre, avec l'intrados de l'arc rehaussé de façon à faciliter le débit du fleuve, met en évidence la possibilité de mieux respecter certaines exigences fonctionnelles.
Nous étudierons plus loin le fonctionnement de ces structures. Revenons maintenant aux arcs proprement dits.

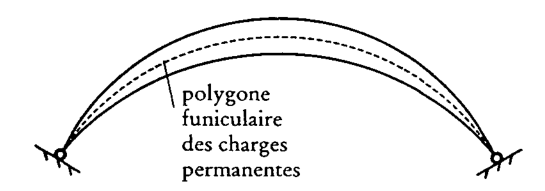




Pont sur l'Aar à Innertkirchen, 1934, ing. R. Maillart (ℓ = 30,00 m, f = 3,50 m, ℓ/f = 8,57) et polygone funiculaire des charges permanentes

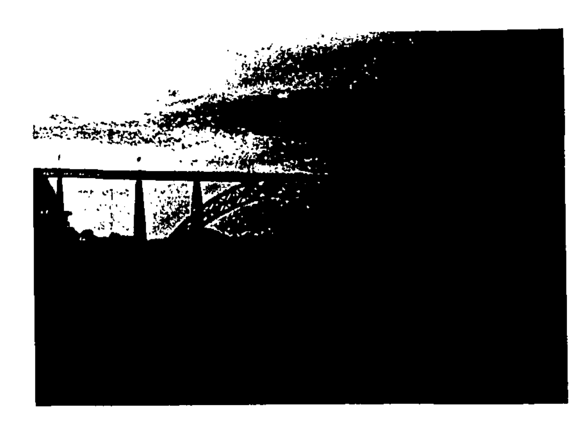
Les arcs à deux articulations, forme idéale

Les arcs qui présentent des articulations uniquement à la naissance sont appelés *arcs à deux articulations*. Comme nous l'avons déjà vu, à cause de leur hyperstaticité, un nombre infini de polygones funiculaires peut s'établir à l'intérieur de ces structures, avec diverses flèches effectives. Précédemment (cf. p. 75), nous avons décrit les deux extrêmes dans lesquels la zone comprimée touche en un point le bord de la structure: en correspondance de l'extrados quand la flèche est maximale, et sur l'intrados quand la flèche est minimale.
L'épaisseur de l'arc peut être optimisée en enlevant le matériau superflu et en faisant en sorte que sous la charge variable maximale la zone comprimée touche le bord en au moins deux points. La figure ci-contre représente une construction de ce type. La forme générale de l'arc est définie par les charges permanentes: dans ce cas, une charge répartie d'intensité constante conduit à une parabole. L'épaisseur résulte en revanche de la variation du polygone funiculaire, variation causée par une charge concentrée variable.



Forme optimale d'un arc à deux articulations construit avec un matériau sans aucune résistance à la traction (Q = 0,25 $g\ell$)

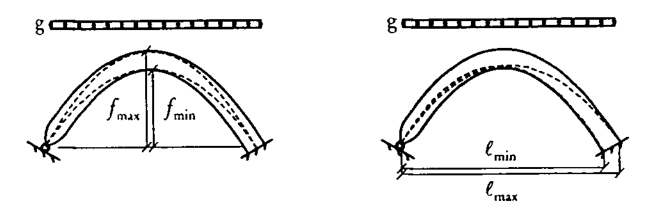
Le pont Maria Pia à Porto, représenté ci-contre, est un exemple classique d'arc à deux articulations. Bien que la structure soit métallique, et donc en mesure de reprendre aussi des efforts de traction, le développement de la largeur se rapproche de la forme optimale déterminée ci-avant. En réalité, dans ce cas, la forme générale de l'arc est parabolique, et s'éloigne par conséquent du polygone funiculaire des charges permanentes. En effet, les charges sont transmises à l'arc au moyen de quelques palées seulement, de sorte que la forme idéale devrait être définie par un polygone dont les sommets sont situés au droit de l'introduction des charges. Puisqu'il s'agit d'un pont ferroviaire, l'influence des charges variables très intenses et beaucoup plus grandes que les charges permanentes résulte dans tous les cas en des déplacements du polygone funiculaire beaucoup plus importants que l'effet de l'approximation de la forme. Ce choix, bien qu'il ne soit pas parfaitement cohérent en ce qui concerne les exigences statiques, est en revanche parfaitement convaincant au niveau visuel.



Pont Maria Pia sur le Douro à Porto, 1877, ing. T. Seyrig, Atelier Eiffel (ℓ = 160 m)

Les arcs à une articulation

Si, dans les arcs à deux articulations aux naissances, la largeur de la structure est suffisante, la ligne d'action des efforts peut varier en prenant diverses flèches. Si un arc est construit avec une seule articulation, en revanche, non seulement la flèche effective, mais aussi la portée effective peuvent varier. Une structure de ce type possède par conséquent un double degré d'indétermination.

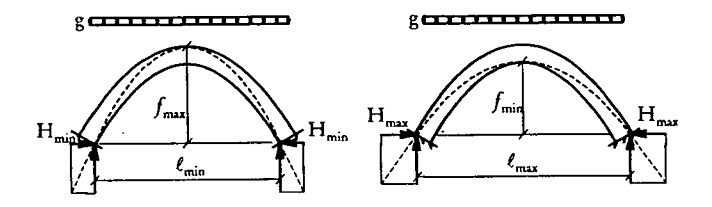


Possible variation de la flèche effective et de la portée effective dans un arc avec une seule articulation (charge uniformément répartie; noter que seuls les extrêmes sont représentés)

Les arcs sans articulation

Le degré d'indétermination est encore plus grand si l'arc n'a aucune articulation. La figure ci-contre montre, pour le même arc avec une charge uniformément répartie, les deux limites des lignes d'action des efforts internes qui ont les caractéristiques suivantes:

- la première présente la flèche effective maximale f_{max} et, en même temps, la portée effective minimale ℓ_{min};
- la seconde est caractérisée par la flèche effective minimale f_{min} et par la portée effective maximale ℓ_{max}.



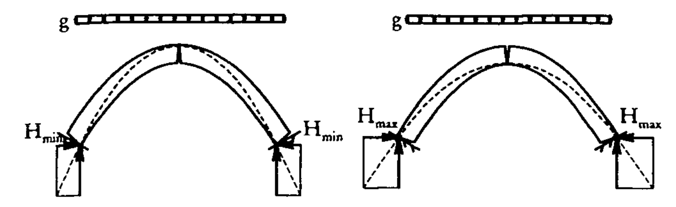
Situations extrêmes dans un arc sans articulation avec charge uniformément répartie

Comme nous l'avons déjà vu pour les câbles (cf. p. 43), la composante horizontale de la poussée vaut

$$H = g\ell^2/8f$$

Aux deux cas ci-contre correspondent par conséquent les deux valeurs extrêmes de la poussée horizontale:

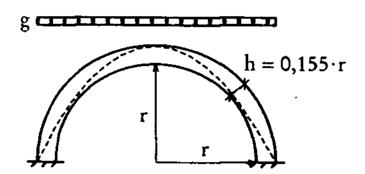
$H_{min} = g\ell^2_{min}/8f_{max}$ et $H_{max} = g\ell^2_{max}/8f_{min}$



Formation d'articulations dûes à la fissuration sous l'effet de déplacements imposés aux appuis: éloignement des appuis à gauche et rapprochement à droite

La ligne d'action des sollicitations effectives se situe toujours entre ces deux extrêmes. Sa position exacte dépend, comme nous l'avons déjà vu, de plusieurs facteurs difficilement définissables (déplacement des appuis, température, méthode de construction, etc.). Un changement d'un de ces facteurs, comme par exemple le déplacement des appuis, induit une variation de la poussée horizontale. En éloignant les appuis, on cause une diminution de la poussée. Si on éloigne les appuis jusqu'à atteindre la poussée minimale, la ligne d'action des efforts à la naissance de l'arc se rapproche de l'intrados alors qu'au faîte elle est très proche de l'extrados. Dans un arc sans aucune résistance à la traction, il se formera des fissures sur le côté opposé, semblables aux découpes que l'on effectue dans les arcs en béton armé pour former des articulations. En continuant d'augmenter la distance entre appuis, on provoque une augmentation de l'ouverture des fissures qui se comportent comme de véritables articulations. De façon analogue, en imposant un rapprochement des appuis, il se produit une augmentation de la poussée horizontale, jusqu'à atteindre la limite maximale. En atteignant une des deux limites on obtient, avec la formation des fissures, la transformation du système en un arc à trois articulations dans lequel la position de la ligne d'action et l'intensité de la poussée horizontale sont déterminés uniquement par les charges (situation isostatique).

Les arcs à plein cintre en maçonnerie



Arc à plein cintre, largeur minimale de l'arc

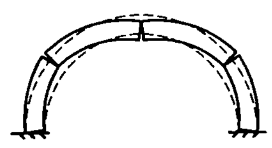
Dans l'Antiquité, les arcs en maçonnerie étaient souvent construits avec une forme circulaire à plein cintre qui s'éloigne fortement du polygone funiculaire des charges permanentes. Pour que la ligne d'action des sollicitations puisse s'instaurer à l'intérieur de l'arc, il faut que ce dernier soit construit avec une épaisseur suffisante. Si l'on fait l'hypothèse d'une répartition constante des charges permanentes, il faut que l'épaisseur h de l'arc soit supérieure à un sixième du rayon r (plus exactement $h > 0{,}155 \cdot r$). A cette épaisseur minimale doit encore être ajoutée la zone nécessaire pour reprendre la sollicitation ($b/2 = N_d/2 \cdot f_d \cdot t$), ainsi que la réserve qu'il faut prévoir pour le déplacement du polygone funiculaire sous l'influence des charges variables.

En réalité, l'épaisseur de l'arc n'atteint pas toujours cette valeur limite, même dans les constructions historiques les plus massives. Là où la ligne d'action des sollicitations se rapproche du bord, il se forme de larges fissures et les parties de l'arc pivotent les unes par rapport aux autres, comme s'il

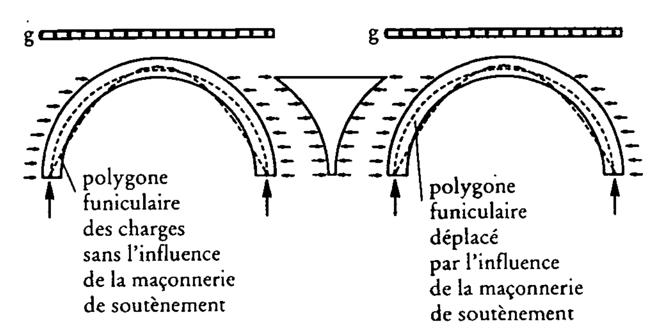


Arcs à plein cintre à la Villa d'Hadrien, Tivoli, 125-133 après J.-C.

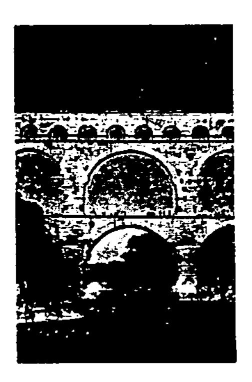
y avait une articulation en ce point. A la différence du cas traité précédemment, il se produit dans ce cas, comme montré ci-contre, la formation de cinq articulations, de sorte que le système devient instable. En effet, les quatre tronçons de l'arc peuvent pivoter librement en s'éloignant de la forme du polygone funiculaire.
Si nous observons attentivement les structures que l'histoire nous a transmises, nous constatons qu'au-dessus de l'arc se trouvent souvent des éléments de maçonnerie de remplage qui chargent les reins de l'arc. Ces éléments, sous l'effet du mouvement des arcs décrits précédemment, sont comprimés horizontalement et exercent par réaction une poussée horizontale qui modifie le polygone funiculaire des charges, ramenant la ligne d'action des sollicitations à l'intérieur de la section de l'arc.
La maçonnerie de remplage exerce par conséquent une fonction structurale fondamentale, et son élimination peut provoquer l'écroulement de l'arc.
L'image ci-contre montre une célèbre construction romaine dans laquelle l'importance de la maçonnerie de remplage est bien visible. Une solution de ce type a été souvent adoptée dans les arcs en maçonnerie qui soutiennent les ponts, les acqueducs ou de simples bâtiments. Dans le cas des portiques, la maçonnerie de remplage devient un élément de la façade comme dans le cas du Palais Ducal à Urbino.



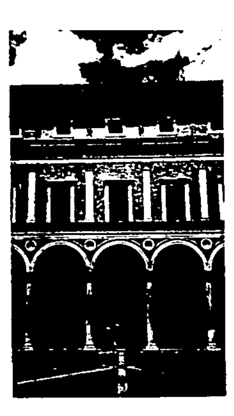
Mécanisme de rupture quand la largeur est insuffisante et la ligne d'action se rapproche trop du bord de l'arc



Activation de la maçonnerie de remplage sous l'effet du mouvement des arcs



Pont du Gard près de Nîmes, 19 av. J.C., (ℓ_{max} = 24,38 m, f = 12,19 m, ℓ/f = 2,0)

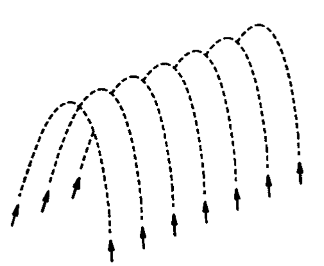


Palais Ducal à Urbino, arch. L. Laurana, env. 1470

Les voûtes, les coupoles et les coques

L'arc comme élément d'une toiture

Il est possible de couvrir une surface par une série d'arcs parallèles entre lesquels est disposée une structure secondaire. Comme dans le cas de la galerie Victor-Emmanuel à Milan représentée ci-contre, la structure secondaire a pour fonction de reprendre les charges réparties sur la toiture et de les transmettre aux arcs. Si on ignore l'interaction possible entre la structure et les deux façades d'extrémité, mais aussi l'instabilité provoquée par des déplacements dans le sens perpendiculaire aux arcs, le fonctionnement est alors identique à celui d'arcs isolés.



Toiture obtenue en disposant une série d'arcs avec un entraxe constant



Galerie Victor-Emmanuel à Milan, 1865, arch. G. Mengoni

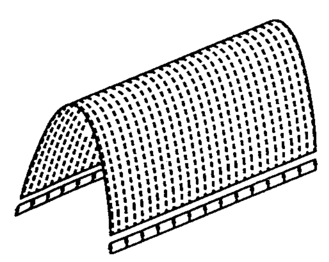
Les voûtes en berceau

Si les arcs sont rapprochés jusqu'à se toucher, de sorte que la structure secondaire devienne superflue, on obtient une voûte. Dans ce cas aussi, le fonctionnement structural correspond à celui des arcs.

La charge uniformément répartie est reprise par chaque arc et transmise de façon uniforme à la fondation, puis au terrain. La fondation, ou la structure qui en tient lieu, doit donc être elle aussi continue, comme la voûte.

Le problème de l'instabilité et de la reprise de charges variables, dont la distribution ne correspond pas à celle des charges permanentes, est identique au cas des arcs, de sorte que les solutions structurales déjà décrites peuvent être appliquées.

L'exemple ci-contre montre une voûte dans laquelle l'épaisseur est suffisante pour garantir la stabilité et pour permettre la reprise des charges variables, comme le vent et des actions sismiques pas trop intenses (la partie manquante a été détruite par un violent tremblement de terre). Il faut observer que la forme générale correspond bien à celle du polygone funiculaire des charges permanentes. A la naissance de la voûte, là où l'intrados est presque vertical, la paroi a une épaisseur importante, de façon à permettre l'établissement d'une ligne d'action des sollicitations inclinée sous l'effet de la poussée horizontale. Ceci n'est certes pas le résultat d'une analyse quantitative, étant donné que les bases d'une telle analyse ont été développées plus de mille ans après l'achèvement de cette voûte. Celle-ci est le fruit d'une profonde connaissance empirique et d'une grande expérience constructive.



Fonctionnement des voûtes



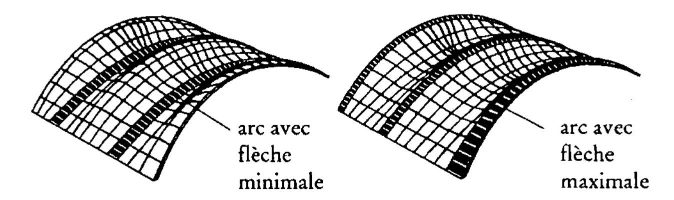
Voûte de toiture de la salle des audiences du Palais de Ctésiphon près de Baghdad, III-IV siècle après J.C. (ℓ = 25,4 m, f = 28,4 m)

L'emploi de matériaux modernes, comme le béton armé, la maçonnerie armée, la tôle d'acier et les matériaux composites, permet de construire des voûtes suffisamment stables en ondulant la surface. De cette façon, il est possible de limiter l'épaisseur à quelques centimètres ou même quelques millimètres, obtenant ainsi une importante économie de matériau. Le fonctionnement est structuralement identique à celui des voûtes plus épaisses. Dans ce cas, l'épaisseur effective, à l'intérieur de laquelle le polygone funiculaire des charges peut se déplacer, ne correspond pas à l'épaisseur du matériau, mais à l'ampleur de l'ondulation.

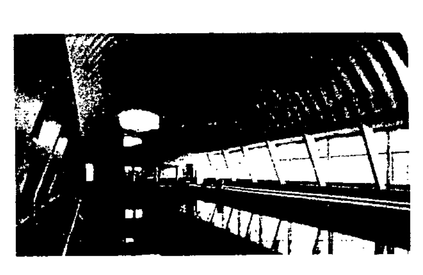
La ligne d'action de la sollicitation peut en effet se déplacer sur la surface plissée, de façon à s'adapter au polygone funiculaire des charges. L'exemple ci-dessus montre deux cas où le déplacement de la ligne d'action, dans le creux ou sur la crête de l'onde, permet d'obtenir respectivement la flèche minimale ou la flèche maximale.

Si la forme de la voûte ne correspond pas à celle du polygone funiculaire des charges permanentes, il est possible d'adopter la même solution structurale que pour les arcs à plein cintre avec l'activation de la maçonnerie de remplage. Dans le cas des voûtes, cette fonction peut être exercée par du simple matériau de remplissage qui, s'il est suffisamment tassé, peut reprendre l'effort de compression nécessaire pour ramener la ligne d'action des sollicitations à l'intérieur de la structure de la voûte.

Les figures ci-contre montrent un exemple historique et un exemple moderne dans lequel une voûte mince en maçonnerie est stabilisée par le béton de remplissage.



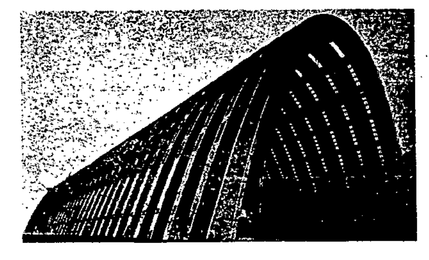
Voûte en berceau avec surface ondulée, fonctionnement avec flèche maximale et minimale



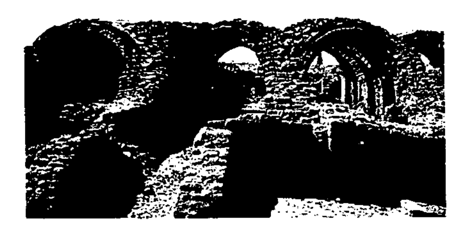
Piscine de l'Académie Navale de Livourne, 1949, ing. P. L. Nervi



Silos pour le riz à Vergana (Uruguay), 1978, ing. E. Dieste (ℓ = 30 m, f = 15 m)

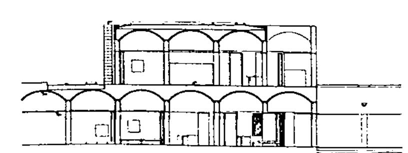


Hangars pour les dirigeables à Orly, 1923, ing. E. Freyssinet (ℓ = 86 m)



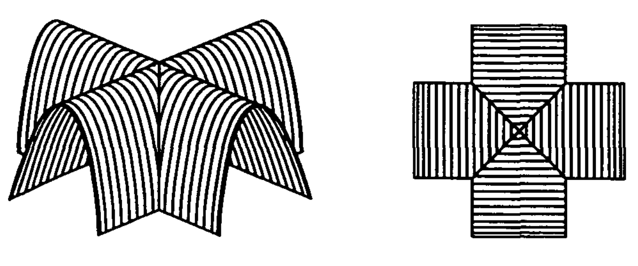
Entrepôts du pharaon Ramsès II à Louxor, XIIIe siècle avant J.-C.



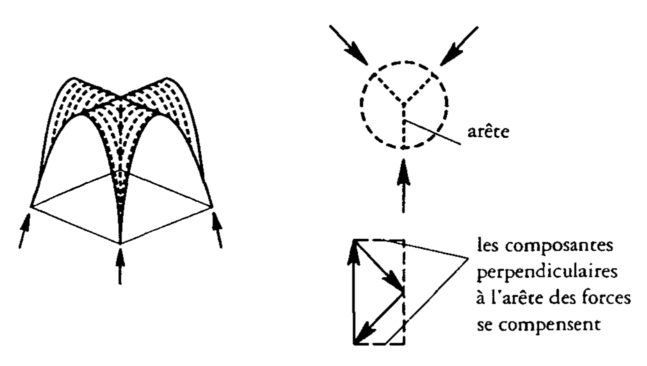


Villa Sarabhai à Ahmedabad, 1955, arch. Le Corbusier [© 2004, FLC/ ProLitteris]

Les voûtes d'arêtes



Construction géométrique des voûtes d'arêtes



Fonctionnement d'une voûte d'arêtes



Voûte d'arêtes des Thermes de Dioclétien à Rome, env. 300 après J.-C., transformation en église de Sainte-Marie-des-Anges par Michel-Ange en 1561

Si on dispose orthogonalement entre elles deux voûtes en berceau et que l'on élimine les parties qui se trouvent en dessous de l'intersection, on obtient une nouvelle figure structurale appelée *voûte d'arêtes*.

Dans la zone centrale on distingue les quatre éléments de voûte en berceau et les quatre arêtes en correspondance des intersections qui exercent elles aussi une fonction structurale.

Là où les voûtes se croisent, les arcs ne peuvent plus transmettre leur poussée à la fondation, mais doivent s'appuyer sur les arêtes. Comme le montre l'étude de l'équilibre de cette zone, pour chaque arc la composante horizontale de la poussée perpendiculaire à la nervure diagonale est équilibrée par la poussée de l'autre arc qui s'appuie sur le même point de la nervure, alors que la composante dans le sens de la nervure, ainsi que la composante verticale de la poussée, est introduite dans la nervure même.

Il faut observer que tous ces éléments ne transmettent leur poussée au terrain qu'en quatre points. Ceci signifie qu'une voûte d'arêtes, au contraire de la voûte en berceau (qui doit être soutenue par une structure continue), peut être posée sur des éléments de soutien ponctuels.

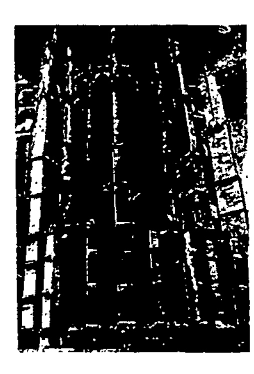
Les premières applications importantes de cette forme structurale sont dues aux Romains. Dans la Basilique de Maxence, la voûte d'arêtes, construite en béton l'an 30 après J.-C., couvre une portée de 25 m. Dans la Villa d'Hadrien à Tivoli, construite vers 120 après J.-C., la toiture des thermes est elle aussi une voûte d'arêtes.

Les voûtes d'arêtes sont généralement beaucoup plus stables que les voûtes en berceau. Ceci tient au fait que les deux éléments qui constituent la voûte peuvent se stabiliser réciproquement. Chaque élément exerce en effet une fonction analogue à celle de la maçonnerie de remplage posée sur un arc.

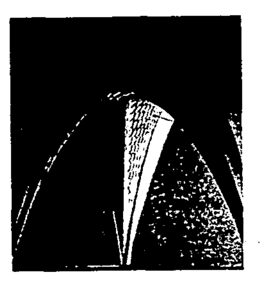
Les voûtes d'arêtes ont eu un important développement avec le gothique. Durant cette période, à part la caractéristique forme ogivale, ont été introduites les voûtes d'arêtes tripartites. Leur géométrie, avec les six éléments de voûte, est obtenue par l'intersection de trois voûtes en berceau dont les sommets se rencontrent en un point.

La toiture de la nef centrale de la cathédrale de Beauvais, reproduite ci-contre, donne un excellent exemple de cette construction géométrique.
L'abside est couverte par une voûte dont la forme suit le même principe. Cette fois, ce sont carrément huit voûtes qui se croisent, de façon à obtenir une structure soutenue par une série de piliers disposés en cercle.
A cause de leur extrême minceur, les piliers sont en mesure de reprendre seulement la composante verticale de la poussée, alors que la composante horizontale doit être reprise par une série d'arcs boutants disposés radialement (bien visibles dans la photographie de l'extérieur).
Dans le projet représenté ci-contre, on a de nouveau une voûte d'arêtes obtenue par l'intersection de trois voûtes en berceau. Dans ce cas, toutefois, il en résulte seulement un élément pour chaque voûte, et la toiture que l'on obtient est à plan triangulaire avec trois supports dans les coins.





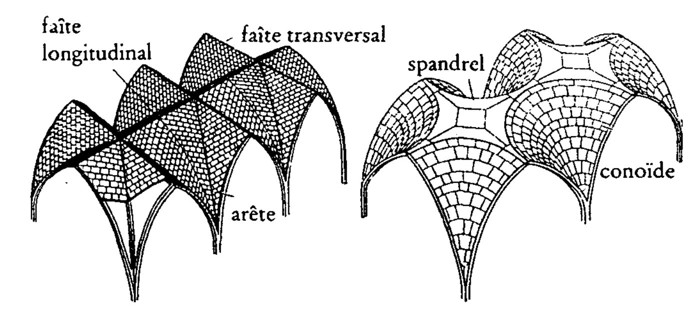
Cathédrale de Beauvais, 1337 (toiture reconstruite après l'écroulement de 1284 causé par une stabilité insuffisante) [© MIT Press]



Projet pour la Cathédrale de New Norcia à Perth, Australie, 1958, arch. P.L. Nervi, A. Nervi, F. Vacchini, C. Vannoni (ℓ = 35,40, f = 30,85 m)

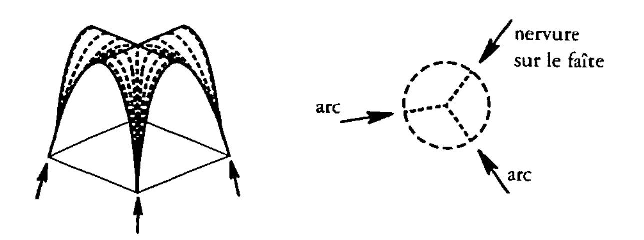
Les voûtes en éventail

Une phase nouvelle de l'évolution des voûtes d'arêtes s'est produite en Angleterre au XIVe siècle. Les éléments de voûte et les arêtes ont été intégrés en une structure continue, courbe aussi en plan. Les éléments géométriques qui constituent cette nouvelle structure sont appelés conoïdes et ont une génératrice courbe qui les différencie du cône commun, obtenu au moyen de la rotation d'une génératrice rectiligne.
La comparaison entre les voûtes d'arêtes et cette nouvelle forme est bien mise en évidence par les deux figures reproduites ci-contre. Une voûte en éventail est habituellement formée par plusieurs conoïdes disposés l'un à côté de l'autre. Ceux-ci se croisent en correspondance des faîtes longitudinaux et transversaux, là où se trouvera une nervure ou un élément horizontal appelé *spandrel.*



Voûte d'arêtes

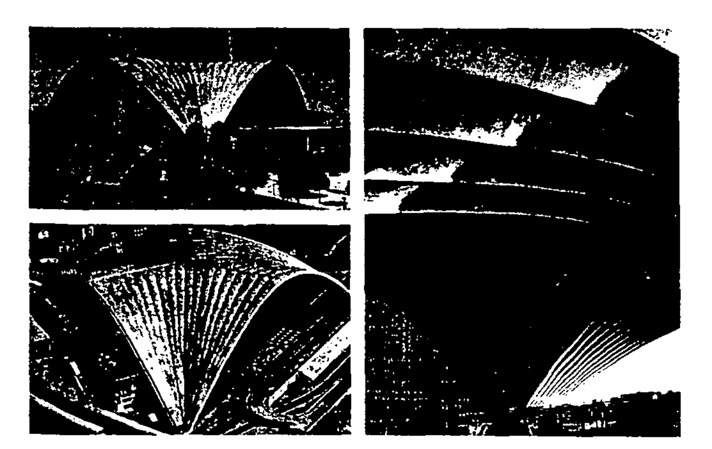
Voûte en éventail



Fonctionnement de la voûte en éventail



Chapelle du King's College à l'Université de Cambridge, 1515
(ℓ = 12,7 m)



Centre des nouvelles industries et technologies (CNIT) à Paris, 1958, arch. R. Camelot, J. De Mailly, B. Zehrfuss, ing. N. Esquillan
(ℓ = 218 m en façade, f = 46,30 m)

Etant donné que le conoïde est une surface à double courbure, nous devrions parler structuralement de coque et non de voûte; ces structures sont néanmoins appelées *voûtes en éventail*. Du point de vue du fonctionnement statique, la définition est effectivement appropriée, du fait que sur la surface se forment effectivement des arcs qui transmettent les efforts dans une seule direction, comme c'est le cas dans les voûtes. Ces arcs sont disposés radialement, comme les barres d'un éventail.

Si la géométrie des arcs ne correspond pas à celle du polygone funiculaire des charges, il se forme des zones comprimées ou tendues dans le sens horizontal également, comme nous le verrons par la suite pour les coupoles. Dans ce cas, le fonctionnement se rapproche de celui des coques.

Là où les conoïdes se croisent, les arcs, au moyen desquels on peut décrire le fonctionnement, se rencontrent et transmettent une partie de l'effort à la nervure du faîte ou au *spandrel*.

La toiture du *Centre des nouvelles industries et technologies* à Paris est un exemple moderne de voûte en éventail. Il s'agit d'une structure en béton armé, à plan triangulaire, de très grandes dimensions. Pour augmenter la stabilité et limiter l'influence des charges variables, la structure est composée de deux coques plissées en béton armé, d'une épaisseur de seulement 6-12 cm, posées à une distance qui varie entre 1,90 et 2,75 m.

Dans la vue aérienne, on voit distinctement les nervures situées sur les faîtes qui ont pour fonction de reprendre une partie des efforts des arcs en éventail.

Les voûtes en arc-de-cloître

Si nous considérons uniquement les parties de voûte en berceau que nous avons éliminées dans la construction géométrique de la voûte d'arêtes, nous obtenons une autre forme structurale appelée *voûte en arc-de-cloître*. Dans ce cas aussi, nous avons quatre éléments de voûte en berceau, appelés *voûtains*, et quatre arêtes au droit des intersections.

Si nous analysons le fonctionnement en idéalisant des arcs disposés sur les quatre voûtains, nous constatons que ceux-ci peuvent transmettre leur poussée directement sur les fondations. Ceci signifie que les voûtes en arc-de-cloître, comme les voûtes en berceau mais au contraire des voûtes d'arêtes, doivent être posées sur des éléments de soutien continus sur tout le périmètre.

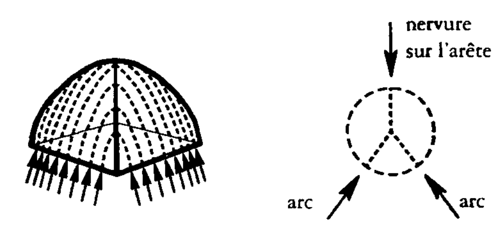
Dans la partie supérieure, les arcs sont interrompus par les arêtes. Leur poussée est en partie compensée par celle de l'arc qui provient de l'autre voûtain, et en partie introduite dans la nervure. A la différence des voûtes d'arêtes, dans lesquelles les nervures étaient poussées vers le bas par les arcs, dans les voûtes en arc-de-cloître les nervures sont poussées vers le haut. Leur sollicitation est nulle au droit des appuis et augmente en montant vers le haut, au fur et à mesure qu'elles reçoivent la poussée des arcs, jusqu'à atteindre l'effort de compression maximal au faîte.

Les voûtes en arc-de-cloître peuvent être combinées avec les voûtes en berceau, de façon à couvrir des espaces rectangulaires très allongés. Dans ce cas, l'effort de compression dans les arêtes, qui atteint son maximum au faîte, comme nous l'avons vu, doit être repris par un élément comprimé, situé sur le faîte de la voûte en berceau.

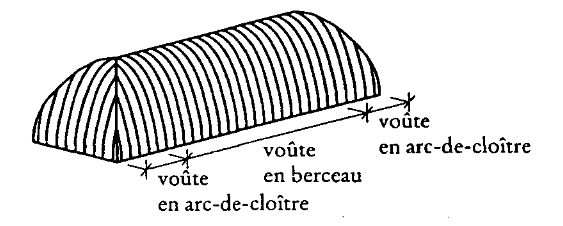
Comme les voûtes d'arêtes, les voûtes en arc-de-cloître peuvent elles aussi être composées de l'intersection d'un nombre quelconque de voûtes en berceau. On obtient ainsi des voûtes en arc-de-cloître dont le périmètre est défini par un polygone avec un nombre quelconque de côtés. La figure reproduite ci-contre montre, par exemple, une voûte en arc-de-cloître à plan octogonal.



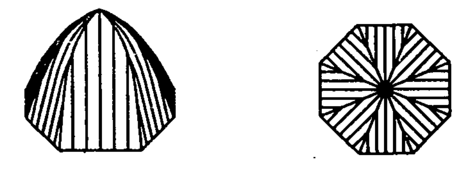

Construction géométrique de la voûte en arc-de-cloître



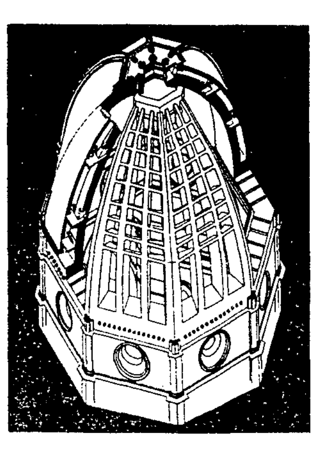
Fonctionnement de la voûte en arc-de-cloître



Voûte en arc-de-cloître composée avec une voûte en berceau



Voûte en arc-de-cloître à plan octogonal

Coupole de Santa Maria del Fiore à Florence, 1436, F. Brunelleschi (ℓ = 42 m)

La coupole de Santa Maria del Fiore à Florence est un exemple de voûte en arc-de-cloître à plan octogonal. La structure portante est composée de deux voûtes en maçonnerie: la première externe, d'une épaisseur de seulement 0,58 m, la deuxième interne, avec une épaisseur qui varie de 2,40 m à la base à 2,10 m au sommet. Les deux voûtes sont reliées par huit nervures principales au droit des arêtes, par seize autres nervures intermédiaires et par des éléments de liaison disposés horizontalement. Le tout forme une structure d'une épaisseur d'environ quatre mètres. Comme le montre bien le schéma ci-contre, les nervures intermédiaires sont disposées de façon radiale et ne s'appuient pas sur les nervures disposées au droit des arêtes. Ces dernières peuvent donc décharger une partie de leur poussée directement sur les appuis. Bien que la forme soit celle d'une voûte en arc-de-cloître, la présence des nervures disposées de façon radiale rapproche son fonctionnement de celui d'une coupole.

Les coupoles

Du point de vue structural, le terme de coupole devrait être réservé aux toitures à plan circulaire ou elliptique. Nous pouvons considérer une structure de ce type comme une voûte en arc-de-cloître, composée d'un nombre infini de voûtains séparés par autant d'arêtes. Dans ce cas, la largeur des voûtains devient infinitésimale, de sorte que les éléments porteurs sont constitués d'un nombre infini d'arcs, tous disposés radialement. Pour mieux visualiser le mode de fonctionnement, nous pouvons représenter un nombre fini d'arcs.
Les différences et les analogies entre les coupoles et les autres types de voûte sont résumées dans le tableau ci-contre.

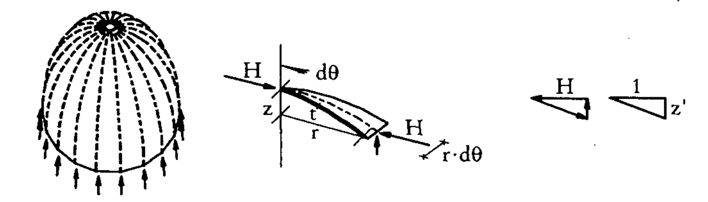
	Structure soutenue en peu de points	Structure soutenue sur tout le périmètre
Surfaces à courbure simple, délimitées par des arêtes: fonctionnement semblable aux voûtes en berceau avec des arcs disposés parallèlement	**Voûte d'arêtes**	**Voûte en arc-de-cloître**
Surface continue à double courbure, avec des arcs disposés de façon radiale	**Voûte en éventail**	**Coupole**

Le fonctionnement effectif des coupoles

Dans le modèle de coupole qui vient d'être décrit, chaque arc reprend la charge qui agit sur la surface correspondante. L'intensité de l'effort dans l'arc peut directement être calculée si on connaît la composante horizontale de la poussée H et la pente de la coupole z'. Si nous voulons connaître la sollicitation effective du matériau (la contrainte de compression ou l'effort par unité de superficie), nous devons diviser l'effort de compression par l'aire de la section

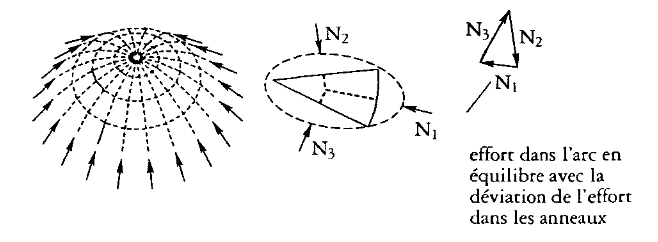
$$A = t \cdot r \cdot d\theta$$

où t est l'épaisseur de la coupole, $d\theta$ est l'angle d'ouverture du secteur de la coupole et r est la distance entre l'axe de symétrie et le point de la coupole que nous voulons analyser.



Coupole fonctionnant simplement comme un ensemble d'arcs, sollicitation des arcs

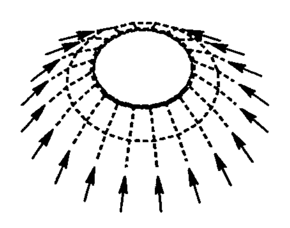
Il faut observer qu'au niveau de l'axe de symétrie, c'est-à-dire au faîte de la coupole, où le rayon r est nul, l'aire de la section de l'arc s'annule elle aussi, de sorte que la sollicitation unitaire du matériau est infinie. Une situation de ce type est évidemment impossible, dans la mesure où aucun matériau ne pourrait résister à une telle sollicitation.
Dans la zone du faîte, les charges ne sont pas reprises uniquement par les arcs disposés radialement le long des méridiens. Il se forme en effet des anneaux comprimés le long des parallèles de la coupole, en mesure de décharger les arcs et d'en limiter la sollicitation.
La figure ci-contre représente, en tant que sous-système, un secteur sphérique de coupole, découpé dans la zone du faîte. Ce secteur sphérique est sollicité aussi bien radialement (arcs méridiens) que dans le sens des anneaux (parallèles). Comme le montre l'équilibre, mis en évidence par un polygone des forces, l'effort de l'arc doit être entièrement introduit dans le système des anneaux.



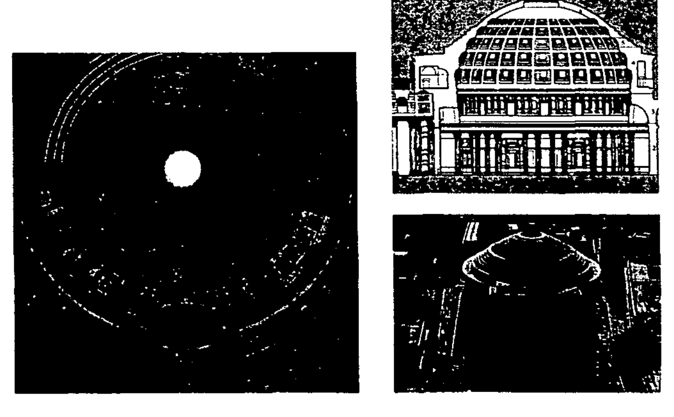
Coupole fonctionnant comme un ensemble d'arcs et d'anneaux

Les coupoles avec une ouverture centrale pour le lanterneau

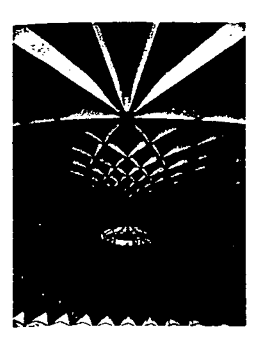
On peut même imaginer que déjà à mi-hauteur, les arcs transmettent complètement leur effort aux anneaux. Il est en effet possible de construire une coupole avec une grande ouverture au sommet, sans compromettre son fonctionnement. Dans ce cas, les arcs sont clairement interrompus au sommet de la coupole: ils s'appuient simplement sur les anneaux comprimés qui se forment au bord du lanterneau. Ces anneaux sont bien sûr plus sollicités que ceux d'une coupole continue.
Les Romains étaient devenus des maîtres dans la construction de coupoles et ont fait un large usage de cette possibilité. Les images ci-contre montrent la coupole du Panthéon à Rome, avec au faîte son ouverture caractéristique de neuf mètres de diamètre. Les arcs et les anneaux visibles sur l'intrados, bien que disposés dans le sens d'action statique, sont purement décoratifs: la structure est en effet une coupole massive en béton.

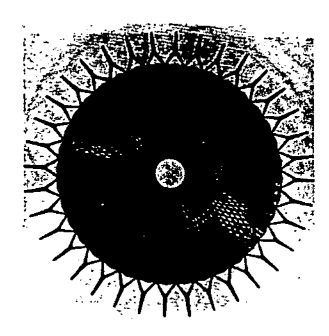


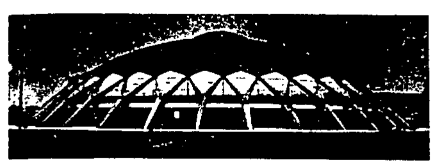
Fonctionnement d'une coupole avec une ouverture au sommet pour le lanterneau



Coupole du Panthéon à Rome avec l'opeion au sommet, 128 après J.-C. (ℓ = 43,30 m, f = 21,65 m)







Palais des Sports à Rome, 1957, arch. + ing. P. L. Nervi, avec arch. A. Vitellozzi (ℓ = 60 m, f = 21 m)

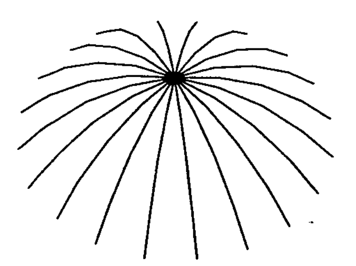
Le Palais des Sports, également à Rome, est une application moderne du même principe. La coupole est constituée par une coque très mince en béton armé. Dans ce cas aussi, les nervures de l'intrados ne doivent pas nous tromper: elles délimitent les éléments préfabriqués et contribuent à stabiliser la voûte. Par contre, leur direction ne correspond dans ce cas pas à celle de la compression effectivement présente dans la coupole (arcs méridiens et anneaux parallèles).
Sur le bord de l'ouverture centrale, on voit l'anneau qui a pour but de reprendre la poussée horizontale des arcs interrompus.
Sur son périmètre, la coupole est soutenue par trente-six chevalets en Y, disposés radialement et inclinés selon la tangente à la coupole. De cette façon, les chevalets transmettent la poussée de la coupole directement aux fondations.

Les coupoles métalliques

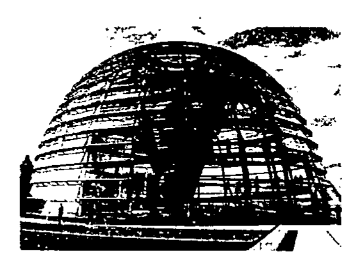
Nous avons décrit jusqu'ici le fonctionnement de coupoles en maçonnerie ou en béton au moyen d'arcs et d'anneaux virtuels que nous pouvons inscrire à l'intérieur du matériau, de façon à reprendre les efforts de compression. Dans le cas des coupoles métalliques, étant donné qu'il n'y a pas de structure continue, il est nécessaire de disposer de véritables arcs et anneaux. En effet, le revêtement constitué le plus souvent par des surfaces vitrées n'exerce généralement pas de fonction portante primaire.

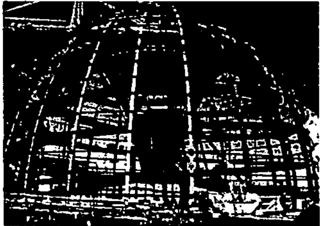
Les arcs croisés

Dans le cas des coupoles métalliques, nous pouvons imaginer une structure composée uniquement par des arcs croisés. En réalité, pour des raisons constructives, il faut prévoir dans la zone où ils se croisent un élément de liaison qui reprend les efforts dans toutes les directions.



Coupole constituée par des arcs croisés

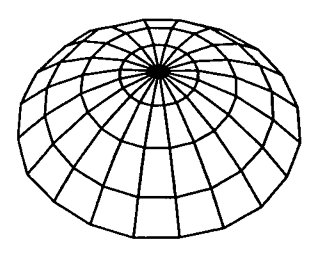




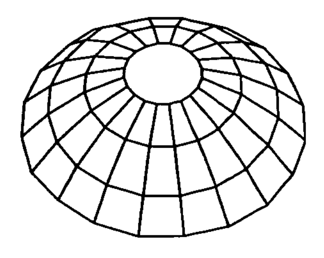
Coupole du Reichstag à Berlin, 1999, arch. N. Foster, ing. Leonardt, Andrä und Partner

Les coupoles constituées par des arcs et anneaux

En réalité, il est utile de disposer des anneaux également dans les coupoles métalliques. De cette façon, les arcs sont partiellement stabilisés et on obtient une plus grande liberté dans le choix de la forme, comme nous le verrons par la suite. Un autre avantage consiste dans la possibilité de créer une ouverture dans la partie centrale, par exemple un lanterneau.



Coupole métallique avec arcs et anneaux



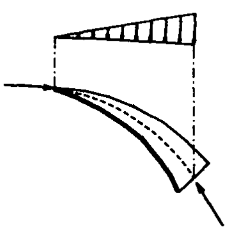
Coupole métallique avec lanterneau central



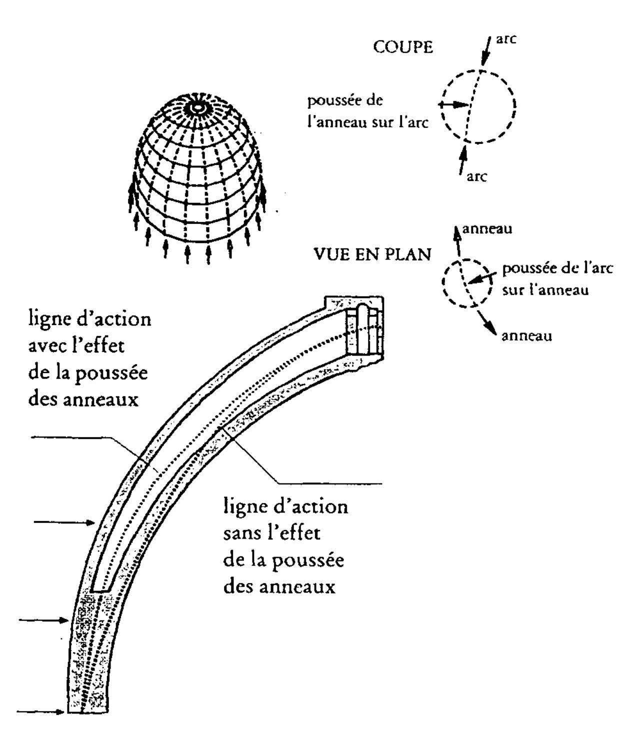
Galerie Victor-Emmanuel II à Milan, 1865, arch. G. Mengoni

La forme des coupoles et les sollicitations

Si nous admettons une charge uniformément répartie sur la surface horizontale, et si nous négligeons pour le moment l'action des anneaux en compression le long des parallèles, le polygone funiculaire prend la forme d'une parabole du troisième degré. Ceci dérive du fait que l'arc que nous pouvons découper dans la coupole est en réalité un secteur sphérique à forme triangulaire en plan. La charge augmente donc de façon linéaire au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'axe.
Dans le cas d'une coupole en maçonnerie ou en béton, comme nous l'avons vu, il ne peut pas se former uniquement des arcs radiaux, parce que la sollicitation spécifique du matériau serait supérieure à sa résistance. C'est pourquoi il faut nécessairement que des anneaux en compression s'établissent, qui modifient aussi la forme du polygone funiculaire. On peut démontrer que dans ce cas, selon l'hypothèse d'une intensité constante des sollicitations aussi bien dans le sens des méridiens que dans celui des parallèles, le polygone funiculaire prend la forme d'une parabole du second degré.
Comme nous l'avons déjà décrit en traitant les arcs et les câbles (cf. p. 70), la détermination du polygone funiculaire et le projet de la forme idéale pour les arcs et les coupoles n'ont été possibles qu'au début du XVIII[e] siècle. Auparavant, la forme était le résultat de l'expérience et d'une approche empirique: les arcs qui devenaient instables étaient renforcés par de la maçonnerie de remplage ou par un système d'arcs-boutants.
Dans l'Antiquité, les coupoles étaient souvent sphériques ou presque sphériques, et par conséquent le polygone funiculaire des charges se rapprochait dangereusement de l'intrados, de sorte que la structure avait tendance à se déplacer vers l'extérieur, comme cela se produit dans les arcs en plein cintre. C'est pourquoi aussi bien dans les coupoles en maçonnerie de la Renaissance que dans les coupoles en béton des Romains, de grosses fissures radiales se sont formées dans la partie inférieure de la structure.
Un exemple intéressant est la coupole de Saint-Pierre à Rome: les études entreprises pour comprendre la cause de ces fissures menèrent pour la première fois au développement du polygone funiculaire d'une coupole. Les études démontrèrent la précarité de l'équilibre et conduisirent à renforcer la structure. Ce renforcement consistait à disposer des anneaux sollicités à la traction, de façon à exercer une poussée horizontale sur les arcs et à ramener ainsi la ligne d'action des sollicitations à l'intérieur de la structure, comme cela se produit dans les arcs en plein cintre avec la maçonnerie de remplage. Il faut observer que dans ces coupoles, la



Charge triangulaire sur secteur sphérique de coupole et polygone funiculaire de la coupole sans anneaux de compression

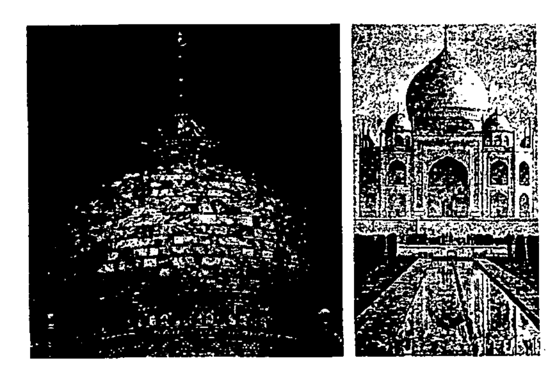


Fonctionnement d'une coupole sphérique avec l'action des anneaux sollicités à la traction, polygone funiculaire des charges dans la coupole de Saint-Pierre à Rome avec et sans l'action des anneaux de renforcement

poussée vers l'intérieur des anneaux peut compenser entièrement la poussée vers l'extérieur des arcs, de façon qu'à la naissance une réaction verticale peut suffire.

L'exemple de la coupole de Saint-Pierre démontre qu'un procédé constructif très simple permet d'atteindre un fonctionnement optimal, même quand la forme de la coupole ne correspond pas à celle du polygone funiculaire. Ceci signifie que les coupoles peuvent être projetées avec une bien plus grande liberté que les arcs. Si la courbure, dans le sens des méridiens, est supérieure à celle du polygone funiculaire des charges, il faut disposer des anneaux sollicités à la traction et le matériau devra être en mesure de résister à ces sollicitations. Sinon, il faut prévoir un renforcement par des anneaux métalliques.

Les coupoles du monde orthodoxe, islamique et hindou, possèdent cette forme dans beaucoup de cas. Souvent, la forme de l'intrados ne suit pas la forme visible de l'extérieur, de sorte que la différence par rapport au polygone funiculaire n'est pas aussi prononcée qu'elle le semblerait à première vue. Dans tous les cas, leur fonctionnement n'est possible que par l'activation d'anneaux fortement sollicités à la traction dans leur partie inférieure.

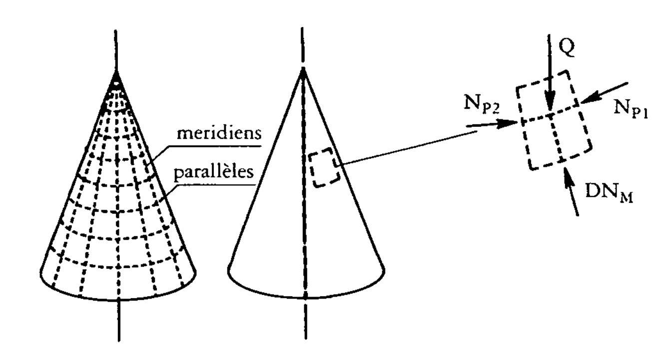


Coupole centrale du Taj Mahal à Agra, Inde, XV[e] siècle

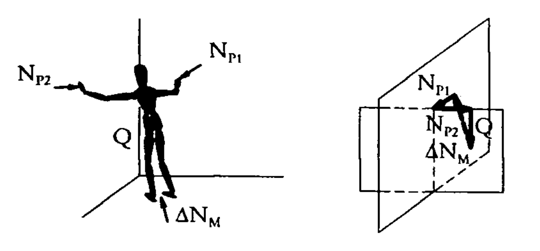
Les coupoles à forme conique

Quand la courbure des arcs méridiens est en revanche inférieure à celle du polygone funiculaire des charges, il faut former des anneaux en compression dans la partie inférieure de la coupole également. Un cas particulier est représenté par les coupoles à forme conique qui furent souvent utilisées comme toiture de tours ou de clochers. Dans un cône, la courbure des arcs méridiens est nulle, et par conséquent il ne peut pas y avoir de déviation de l'effort de compression dans ce sens.

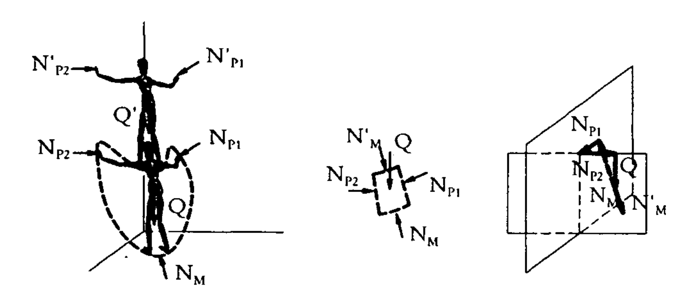
Le fonctionnement devient immédiatement compréhensible si on étudie un élément découpé dans le cône, sur lequel agissent les forces et sollicitations suivantes: la charge avec une ligne d'action verticale, un effort de compression sur la base de l'élément avec la ligne d'action dans le sens des méridiens rectilignes, et deux efforts de compression dans le sens des anneaux parallèles. Puisque les deux efforts qui agissent dans le sens des anneaux parallèles agissent sur deux sections distinctes, leur direction n'est pas la même. Bien qu'ayant la même intensité, il se crée une force de déviation qui pousse l'élément vers l'extérieur. L'équilibre de ces forces peut être



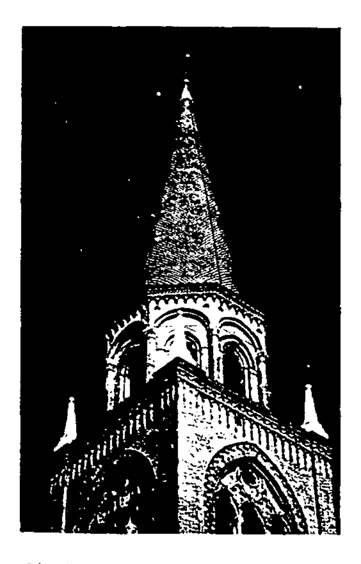
Sollicitations dans un cône sous l'effet des charges permanentes



Analogie avec une personne qui s'appuie contre les deux parois à l'angle d'une chambre



Equilibre en considérant la poussée exercée par les éléments supérieurs


Clocher de S. Andrea à Mantoue, 1413

étudié par un polygone des forces dans l'espace, ou bien en analysant d'abord les composantes horizontales des forces et, dans un second temps, la projection des forces sur un plan vertical qui passe par l'axe de symétrie du cône. Nous pouvons comprendre encore mieux cette situation au moyen d'une analogie, en pensant par exemple à une personne qui s'appuie contre les deux parois à l'angle d'une chambre.

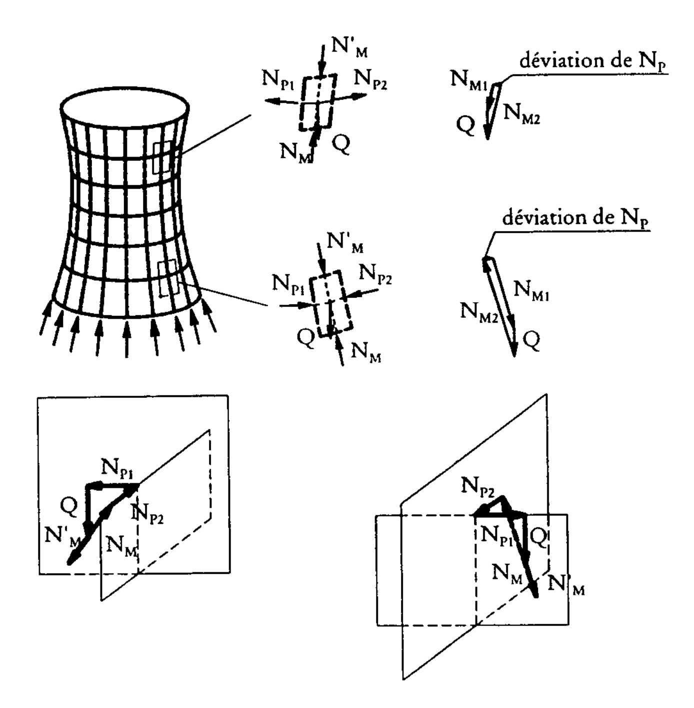
En réalité, sur le sous-système que nous avons découpé dans la coupole, nous aurions dû considérer aussi l'effort de compression transmis par la zone située au-dessus (qui n'aurait toutefois pas influencé l'équilibre). L'effort considéré représente en revanche uniquement l'augmentation qui se produit dans cette zone. L'effort dans le sens des méridiens augmente donc au fur et à mesure que l'on se déplace vers le bas.

Dans l'analogie utilisée précédemment, ce serait comme si la personne qui s'appuie contre le mur en portait une autre sur les épaules (qui s'appuierait elle aussi contre les parois). La personne du dessus exerce une poussée inclinée sur les épaules. La personne du dessous doit simplement transmettre cette poussée aux pieds, et par conséquent son équilibre n'est pas influencé.

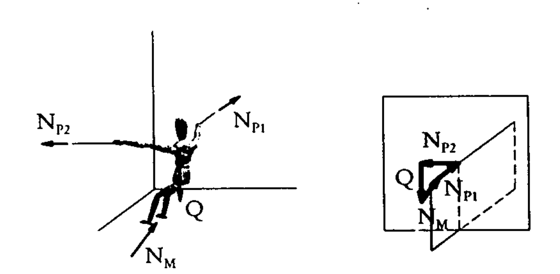
La formation d'une ouverture dans la partie supérieure de la coupole, avec l'obtention d'un tronc de cône, aurait comme unique effet de réduire l'effort de compression dans le sens des méridiens. Le fonctionnement structural décrit ci-dessus demeurerait en revanche inchangé.

Les hyperboloïdes de révolution

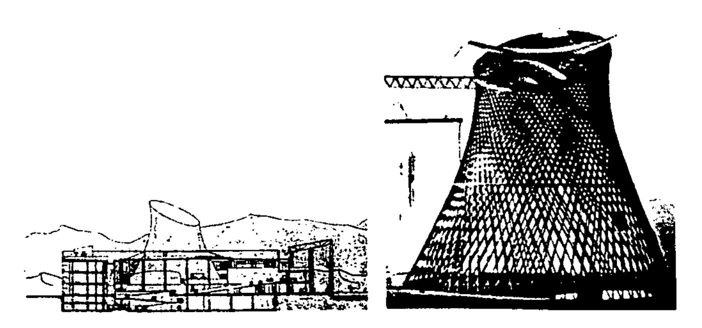
Les hyperboloïdes de révolution, souvent employés pour les tours de refroidissement des centrales thermiques ou nucléaires, ont des caractéristiques analogues. Dans la partie inférieure, la courbure des arcs qui agissent dans le sens des méridiens est carrément orientée vers le haut, de sorte que la force de déviation de l'effort dans le sens des méridiens s'ajoute à la charge permanente qui agit vers le bas. Le mécanisme de reprise au moyen d'anneaux parallèles sollicités à la compression, et la transmission aux appuis au moyen d'arcs dans le sens des méridiens sont analogues à celui du cône. Dans la partie supérieure, la pente est inversée, et on a par conséquent un fonctionnement analogue à celui d'un cône renversé avec la pointe vers le bas. L'augmentation de la compression dans le sens des méridiens a une composante qui agit vers l'extérieur, de sorte que les anneaux parallèles sont sollicités à la traction. En repensant à notre analogie, ce serait comme si la personne s'agrippait désormais à deux câbles comme représenté dans le schéma ci-contre.



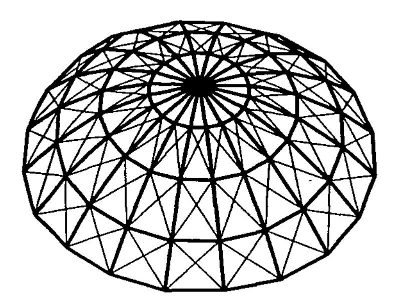
Fonctionnement des hyperboloïdes de révolution sollicités par la charge permanente



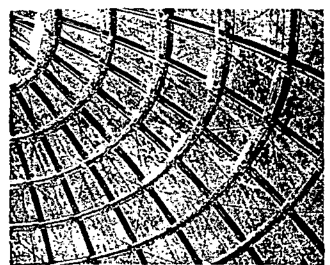
Analogie pour expliquer le fonctionnement dans la partie supérieure de l'hyperboloïde de révolution



Palais de l'Assemblée de Chandigarh, arch. Le Corbusier, 1955, coupe et maquette [© 2004, FLC/ProLitteris]

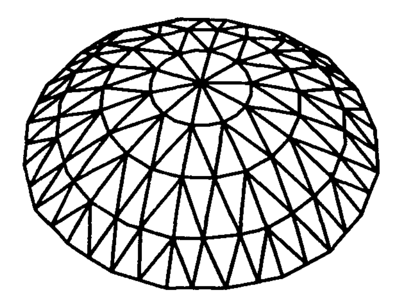


Coupole métallique avec diagonales

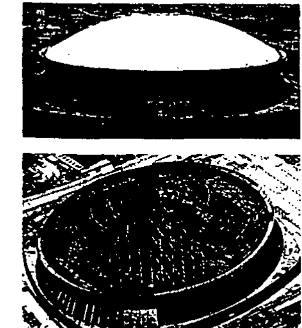


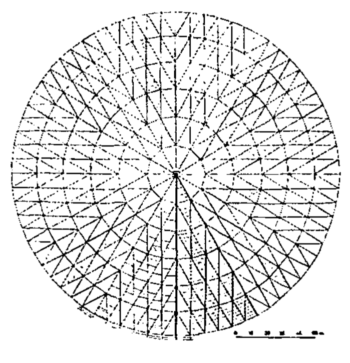


Salle de conférences « La Goccia » au Lingotto à Turin, 1996, arch. Renzo Piano, ing. bureau Ove Arup



Coupole avec arcs secondaires





Stade à New Orleans (coupole avec un diamètre de 207,3 m), 1973, Sverdrup & Parcel and Associates

La reprise de charges horizontales ou verticales quelconques

Dans les structures hautes, comme les hyperboloïdes de révolution qui servent de tour de refroidissement ou les cônes qui couvrent les clochers, la charge déterminante n'est pas nécessairement la charge permanente, mais la charge causée par la poussée du vent. Dans ce cas, l'analyse du fonctionnement devient plus complexe, du fait que la charge n'est plus symétrique. Il en résulte par conséquent des sollicitations dont les directions ne suivent pas les méridiens et les parallèles de la structure. Dans le cas des coupoles en maçonnerie ou en béton, le fonctionnement peut toutefois être décrit par une série d'arcs et de tirants disposés à la surface moyenne de la structure.

Dans le cas des coupoles métalliques, composées par des arcs méridiens et par des anneaux parallèles, la reprise des poussées horizontales et des actions non symétriques est plus complexe.

Une solution structurale possible consiste à augmenter la largeur des arcs, de façon que le polygone funiculaire des charges puisse se déplacer sans créer de trop fortes déformations et des sollicitations de traction trop importantes. Dans la coupole de la Galerie Victor-Emmanuel à Milan (photographie à la page 94) on voit clairement des arcs capables de résister à des charges non symétriques.

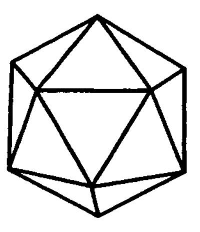
Une seconde possibilité consiste à disposer des diagonales à l'intérieur des quadrilatères formés par les méridiens et les parallèles, comme le montre le schéma ci-dessus.

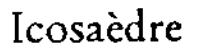
Ces diagonales peuvent être constituées par de simples câbles. On obtient ainsi une structure qui reste transparente, malgré les éléments supplémentaires. De cette façon, la section des arcs méridiens et des anneaux parallèles peut effectivement être réduite de façon significative.

Une autre solution consiste à disposer des arcs secondaires, en mesure de reprendre les poussées non symétriques. Dans ce cas, on obtient toutefois une structure relativement peu transparente, à cause du grand nombre de barres résistant à la compression. En raison de son efficacité, cette typologie structurale est habituellement adoptée dans les coupoles de grandes dimensions, ou si la transparence n'est pas exigée.

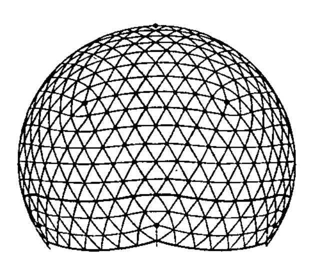
Les coupoles géodésiques

Dans les solutions précédemment décrites, bien que l'on ait introduit des barres supplémentaires sous forme de diagonales ou d'arcs, les arcs méridiens et les anneaux parallèles sont toujours reconnaissables. Dans le cas des coupoles géodésiques, développées par Buckminster Fuller, il y a trois systèmes d'arcs très irréguliers qui se croisent. La forme de ces coupoles se base sur la projection de l'icosaèdre sur la surface de la sphère. Il est ainsi possible de réaliser des coupoles sphériques, comme représenté ci-contre.

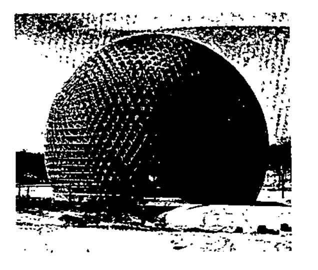




Icosaèdre



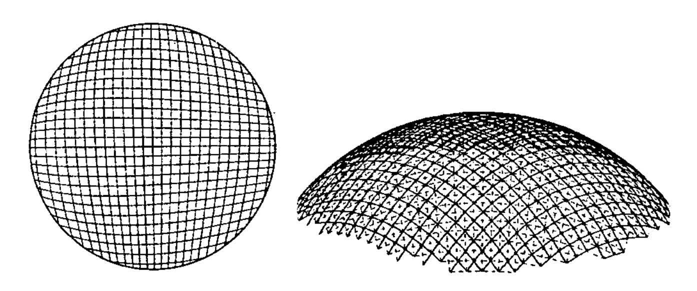
Coupole géodésique



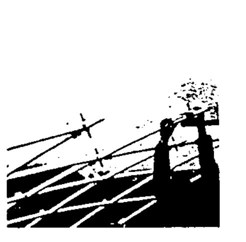
Coupole du pavillon USA à l'EXPO 67 à Montréal, Buckminster Fuller

Les coupoles à réseau

Une structure composée de deux systèmes d'arcs seulement a été développée récemment par l'ingénieur allemand J. Schlaich. Comme nous le verrons par la suite, il est possible d'obtenir avec ce principe des structures de diverses formes. Dans la coupole représentée ci-dessous, les deux systèmes d'arcs qui forment le réseau reprennent chacun une partie des charges, et présentent tous les deux une courbure vers le bas. Le fonctionnement est donc différent d'un réseau de câbles sollicités à la traction, dans lequel un faisceau avec la courbure vers le haut reprend les charges, alors qu'un second faisceau exerce une poussée de prétension vers le bas. Les coupoles à réseau avec maille carrée, comme les exemples représentés ci-contre, ne possèdent pas encore la rigidité nécessaire pour les cas de charges asymétriques, comme par exemple le vent et la neige. Pour résoudre ce problème, on tend de minces câbles diagonaux.

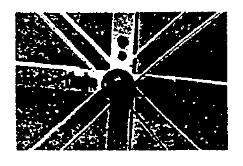


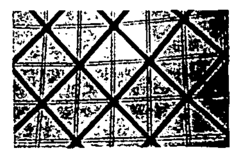
Coupole à réseau





Toiture d'une piscine à Nerckarsulm, 1989, arch. K.-U. Bechler, ing. J. Schlaich





Montage de la structure et détails

Les coques et les coupoles quelconques

Les coupoles traitées jusqu'ici sont caractérisées par une forme géométrique qui peut être obtenue en faisant tourner une courbe quelconque autour d'un axe, généralement vertical. Dans ces cas, on parle de coupoles de révolution. En réalité, la famille des coupoles est bien plus vaste et comprend toutes les figures géométriques qui ne satisfont pas nécessairement cette règle: nous parlons dans ce cas de *coupoles quelconques* ou, plus simplement, de *coques*. On désigne par cette expression une structure spatiale sollicitée essentiellement à la compression, dont l'épaisseur est faible par rapport aux autres dimensions. En d'autres termes, nous avons une structure similaire à une membrane, mais sollicitée à la compression.

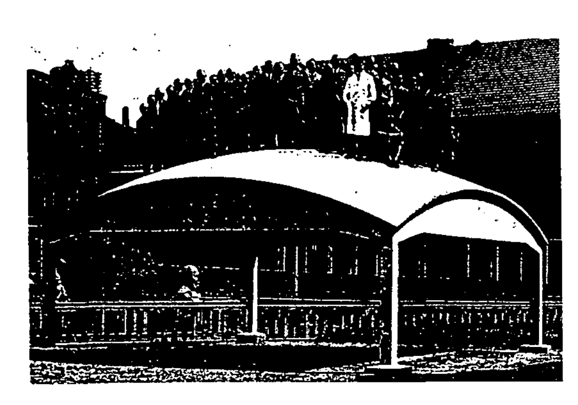
Les coques à double courbure orientée vers le bas

Les coques prennent la forme d'une coupole quand les deux courbures principales sont orientées vers le bas. Du point de vue du fonctionnement, ceci signifie que sur une surface de ce type peuvent se former deux systèmes d'arcs différents en mesure de reprendre chacun une partie de la charge. Dans certains cas particuliers, comme nous l'avons vu précédemment, un système d'arcs est remplacé par un système de tirants.

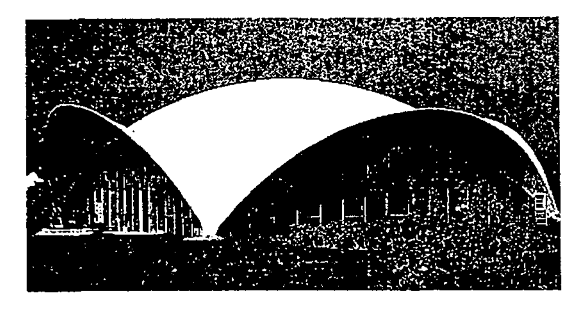
Avec l'introduction du béton, il est devenu possible de construire des coques très minces en mesure de couvrir des portées relativement importantes. Les premiers exemples étaient caractérisés par la présence d'un bord relativement massif. Ce bord servait surtout à introduire des efforts au droit des appuis, de façon à empêcher que des phénomènes d'instabilité se produisent.

Une évolution intéressante consiste à plier la coque le long des bords libres, de façon à former un raidissement. Dans la figure ci-contre, les raidissements ainsi obtenus continuent jusqu'au sol et forment les appuis.

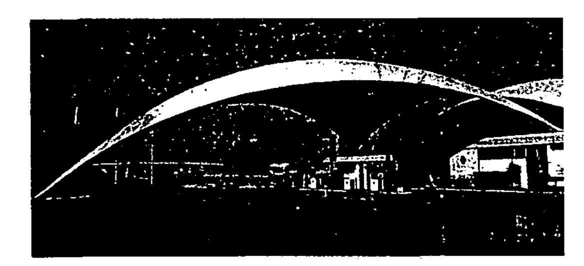
Une solution alternative consiste à augmenter l'épaisseur à proximité des bords et dans la zone des appuis. De cette façon, il est possible d'obtenir des structures de grande élégance.



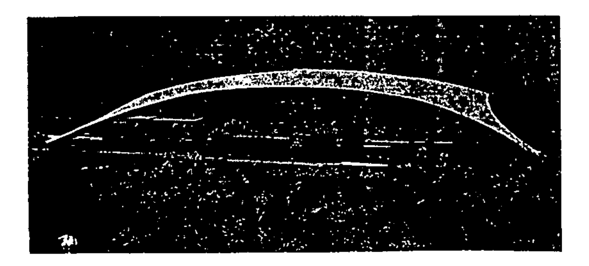
Toiture expérimentale à Jena, 1932, ing. F. Dischinger et U. Finsterwalder (ℓ = 7,3 × 7,3 m, épaisseur = 1,5 cm !)



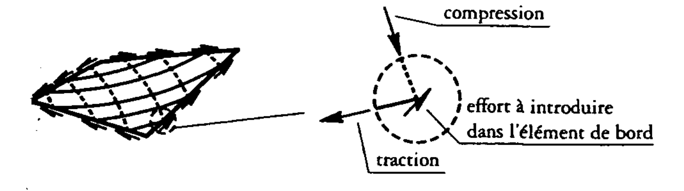
Centre de jardinage Wyss à Soleure, CH, 1961, ing. H. Isler



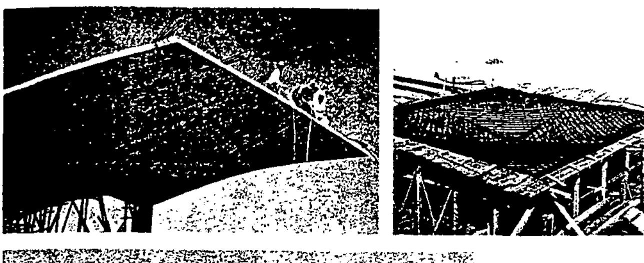
Toiture de la station-service à Deitingen, CH, 1968, ing. H. Isler (ℓ = 26 × 31 m)

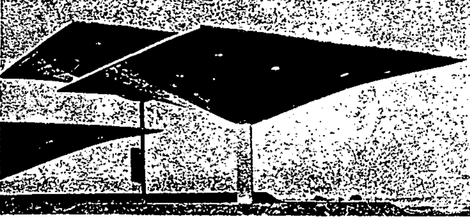


Centre de jardinage Bürgi à Camorino, CH, 1973, ing. H. Isler (ℓ = 27,2 × 27,2 m)

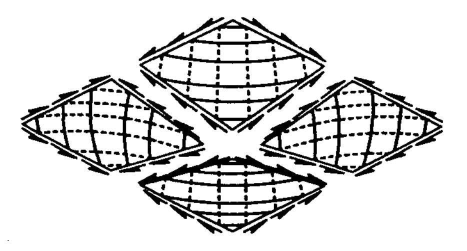


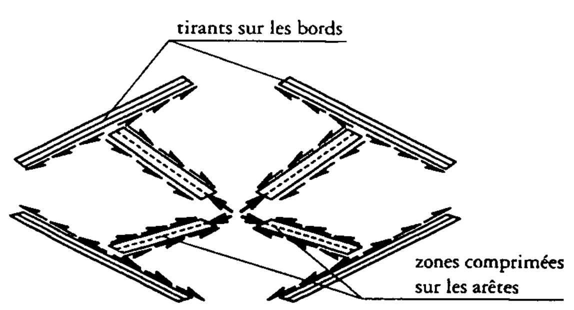
Fonctionnement d'une coque en forme de paraboloïde hyperbolique avec arcs et câbles





Toiture à l'Almacenes Hernaiz, Mexique, 1956, et dans le parc industriel Great Southwest, Dallas, 1958, arch. F. Candela



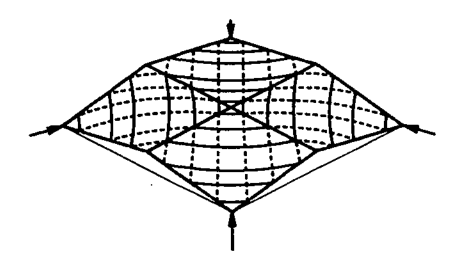


Fonctionnement d'une toiture constituée par quatre paraboloïdes hyperboliques soutenus centralement; l'image du haut montre les paraboloïdes isolés, alors que celle du bas montre les éléments comprimés sur les arêtes et les tirants sur le bord

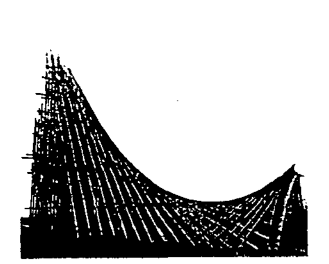
Les coques à courbure orientée vers le haut et vers le bas, les paraboloïdes hyperboliques

Quand nous avons traité le sujet des réseaux de câbles, nous avons vu qu'à partir du paraboloïde hyperbolique il était possible de découper des sections paraboliques dont la courbure est orientée aussi bien vers le haut que vers le bas. Si une coque avec cette forme est construite dans un matériau résistant aussi bien à la compression qu'à la traction, comme par exemple le béton armé, il se forme sous l'effet d'une charge verticale des arcs sollicités à la compression dans le sens des paraboles incurvées vers le bas, alors que dans l'autre direction la coque est sollicitée à la traction, comme si elle était une membrane. Chacun de ces éléments est donc en mesure de reprendre une partie de la charge. L'analyse de ces situations peut s'effectuer en isolant tout d'abord les arcs qui se comportent comme une voûte en berceau, puis en considérant dans un second temps la membrane. La répartition de la charge entre les arcs et la membrane doit tenir compte de l'équilibre sur les bords. En l'absence d'un bord rigide en mesure d'exercer un effort de traction ou de compression dans le sens transversal, les efforts dans les arcs et dans la membrane doivent s'annuler dans cette direction. Il ne reste qu'un effort le long du bord, qui peut être repris par une mince nervure ou par une partie du bord de la coque.
On peut obtenir une toiture en disposant plusieurs paraboloïdes hyperboliques l'un à côté de l'autre et en les joignant aux arêtes. Une composition classique de ce type s'obtient en joignant quatre éléments identiques et en les soutenant par un pilier central.
Une zone comprimée se forme dans chacune des quatre arêtes qui convergent vers le pilier, dans laquelle confluent les composantes le long des arêtes des efforts dans les arcs et dans les membranes, comme décrit précédemment. Au droit du pilier, les composantes horizontales des efforts dans les quatre arêtes s'annulent réciproquement, alors que les composantes verticales s'ajoutent et sont transmises au pilier.
Des efforts résiduels existent aussi sur les bords horizontaux des paraboloïdes hyperboliques. Ces efforts doivent être transmis à quatre éléments de bord, qui sont sollicités à la traction. La sollicitation de ces tirants est en équilibre avec les efforts dérivant du paraboloïde adjacent.

Les quatre éléments de paraboloïde hyperbolique qui constituent les structures décrites ci-dessus peuvent être disposés de façon à être soutenus aux quatre coins. La configuration que l'on obtient est semblables aux voûtes en éventail décrites précédemment (cf. p. 89). Dans ce cas, sur chaque appui convergent seulement deux nervures comprimées et les forces que celles-ci transmettent aux appuis ont aussi des composantes horizontales. Il est possible de reprendre ces poussées au moyen de tirants disposés entre les deux appuis.
De façon analogue aux voûtes en éventail, il est possible également dans le cas du paraboloïde hyperbolique de disposer un grand nombre d'éléments l'un à côté de l'autre. On obtient ainsi une toiture soutenue par d'innombrables appuis, sans limites en ce qui concerne les dimensions.
Les paraboloïdes hyperboliques décrits ci-dessus sont tous délimités par les génératrices, de sorte que les bords sont rectilignes. Dans l'exemple reproduit ci-contre, les bords sont en revanche définis par des sections qui ne correspondent pas aux génératrices. De cette façon, on obtient des bords curvilignes (paraboles et hyperboles).



Fonctionnement d'une toiture constituée de quatre paraboloïdes hyperboliques soutenus aux quatre coins





Capilla abierta, Lomas de Cornavaca, Palmira, Mexique, 1958, arch. F. Candela, cintre en bois pour couler la coque en béton armé (il faut noter l'analogie avec la maquette de Le Corbusier pour Chandigarh, voir p. 98), et structure terminée

Les surfaces à selle de singe

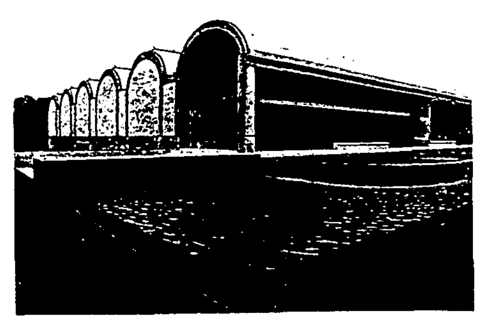
De façon analogue aux voûtes d'arêtes, qui dérivent de l'intersection de voûtes en berceau, les surfaces à *selle de singe* sont obtenues en croisant des paraboloïdes hyperboliques. Il est possible de maintenir les arêtes au droit des intersections, ou bien de les arrondir de façon à obtenir une surface continue.



Surface à selle de singe, Restaurant Los Manantiales, Xochimilco, Mexique, 1957, arch. F. Candela

Les coques cylindriques

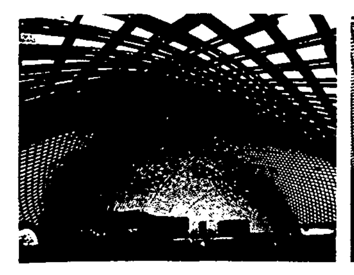
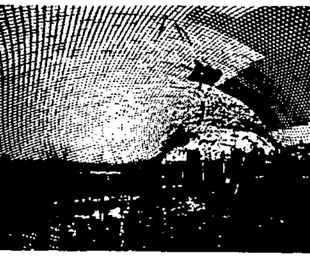
Comme nous l'avons déjà vu dans le cas du paraboloïde hyperbolique, la même figure géométrique peut être employée de façon à obtenir des structures fort différentes. Leur fonctionnement présente toutefois de fortes similarités. Dans d'autres cas, des structures qui ont apparemment la même forme peuvent toutefois fonctionner de façon complètement différente si les conditions statiques dans les bords sont modifiées. C'est le cas par exemple des coques cylindriques qui ont la même forme que les voûtes en berceau, mais qui sont soutenues, contrairement à ces dernières, en quelques points seulement.
Dans la partie haute de la coque, des arcs s'établissent exactement comme dans les voûtes. A cause des bords libres, ces arcs doivent toutefois transmettre leur poussée à un autre système porteur qui agit dans le sens longitudinal et qui transmet la charge aux appuis. Ce système porteur est composé d'arcs longitudinaux qui collaborent avec un système de tirants, de façon analogue à ce qui se passe dans les poutres. C'est pourquoi nous reviendrons plus loin sur les coques cylindriques.



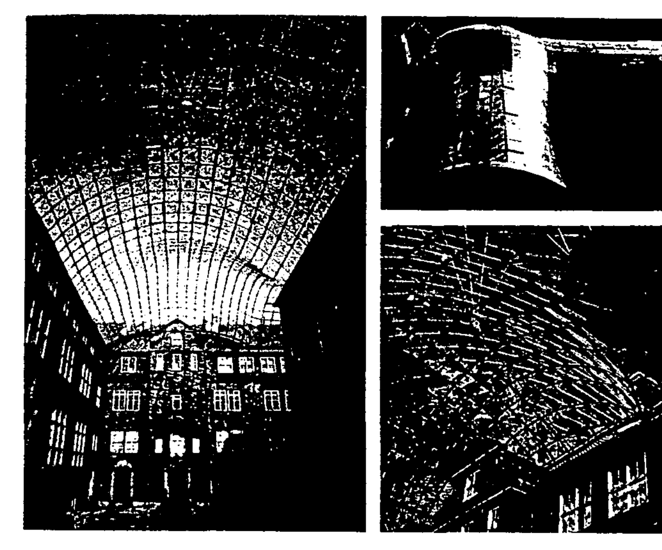
Kimbell Art Museum, Fort Worth, Texas, 1972, arch. L. I. Kahn, ing. A. Komendant

Les réseaux d'arcs

Nous avons réservé le terme de coque aux structures continues qui sont généralement, dans le domaine du bâtiment, construites en béton ou en maçonnerie. Dans d'autres domaines, les coques peuvent être en métal, en bois contreplaqué ou en matériaux synthétiques. Il suffit par exemple de penser aux bateaux et aux carosseries. Dans le bâtiment, les structures métalliques ou en bois de ce type sont en général composées d'éléments linéaires superposés. Nous parlerons dans ce cas de réseau d'arcs. On obtient une grande rigidité et une bonne stabilité en croisant trois systèmes d'arcs. Si une transparence maximale de la structure est exigée, il est toutefois préférable de renoncer au troisième faisceau d'arcs et de le remplacer par des faisceaux supplémentaires de câbles minces.

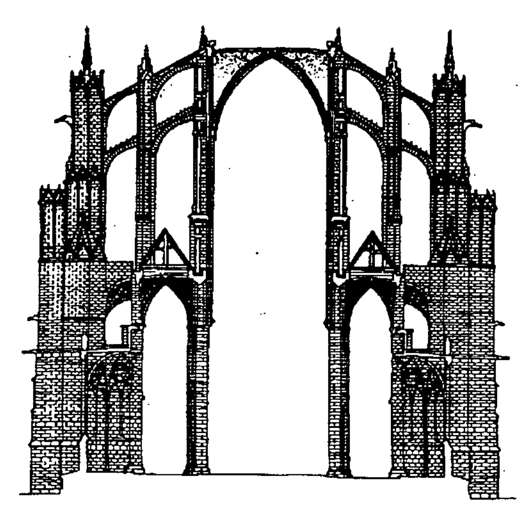
Réseau d'arcs à Mannheim, 1971, arch. Mutschler, Langner et Frei Otto, ing. T. Happold



Cour du musée historique de Hambourg, 1989, arch. V. Marg, ing. J. Schlaich

Les structures funiculaires à poussée compensée

La reprise de la composante horizontale de la poussée



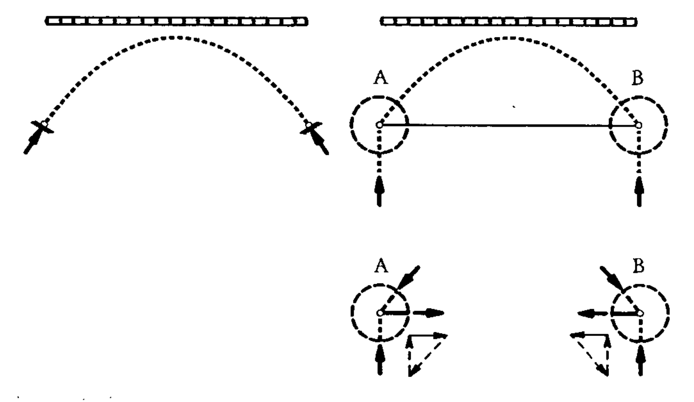
Structure de contraste de la cathédrale de Beauvais (sur la nef centrale on voit seulement la toiture interne constituée par une voûte à arêtes tripartite en maçonnerie; la toiture externe, constituée par une structure en bois qui transmet uniquement des forces verticales aux piliers, n'est pas représentée) [© MIT Press]

Comme nous l'avons vu dans les arcs, dans les voûtes, dans les coupoles et, partiellement dans les coques aussi, le système porteur principal est constitué par une zone comprimée qui est déviée par les charges, et qui subit pour cette raison une variation de son inclinaison. Sur les appuis agit donc non seulement une poussée verticale en équilibre avec les charges, mais aussi une poussée horizontale qui correspond à l'effort de compression au faîte.

Si cette poussée ne peut pas être transmise directement au terrain, par exemple parce que la structure se trouve à une certaine hauteur, des structures de support sont nécessaires. Nous avons déjà vu que dans les cathédrales gothiques la composante verticale de la poussée est transmise au terrain par les piliers, alors que la composante horizontale est reprise par des structures de contraste, constituées par un système complexe d'arcs-boutants et de contreforts.

Ces structures ont également d'autres fonctions: elles résistent aux charges horizontales du vent et, en cas de tremblement de terre, elles stabilisent l'ensemble de la construction. Mais revenons à leur but principal qui consiste à reprendre la composante horizontale des poussées. Nous pouvons imaginer un système alternatif très simple pour effectuer la même tâche: une barre qui relie les deux naissances de l'arc. Cette solution a été souvent utilisée, non seulement pour assainir les constructions où les structures de contraste étaient insuffisantes, mais aussi comme choix initial de projet.

Le fonctionnement est facilement compréhensible si nous analysons des sous-systèmes qui comprennent la zone des naissances et leurs appuis respectifs. La composante verticale de la poussée est en équilibre avec la force verticale que les piliers exercent vers le haut, alors que la composante horizontale est équilibrée par la sollicitation que la nouvelle barre exerce vers l'intérieur. A partir de cette considération, nous constatons immédiatement que cette barre est sollicitée à la traction: il s'agit par conséquent d'un tirant. En d'autres termes, la force exercée par le tirant vers l'intérieur de l'arc ou de la voûte est en mesure de dévier la poussée et de reporter sa ligne d'action verticale sur les appuis, comme cela se passe dans les coupoles sphériques sous l'effet des anneaux sollicités à la traction. Si nous analysons un sous-système qui comprend l'autre naissance, et si les charges qui agissent sur l'arc sont toutes verticales, nous obtenons le même effort de traction dans le tirant: ceci signifie que le tirant transmet les poussées horizontales de part et d'autre de l'arc, en les équilibrant.



Fonctionnement d'un arc avec un tirant à la naissance comparé avec un arc sans tirant

L'arc avec tirant

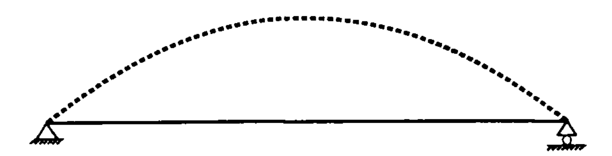
Si on compose l'arc avec un tirant, on obtient par conséquent une nouvelle structure qui permet de transférer de façon différente les charges aux fondations.
L'exemple ci-contre montre une structure qui utilise ce principe. Il s'agit d'un cintre temporaire de coffrage utilisé pour la construction d'un arc en béton armé. Durant le déplacement d'une travée à l'autre du pont, la structure a été posée sur deux barges, évidemment en mesure de reprendre seulement les forces verticales de support (poussée d'Archimède). L'arc du cintre, avec seulement deux articulations aux appuis, est constitué par une structure en bois, alors que le tirant est en acier.



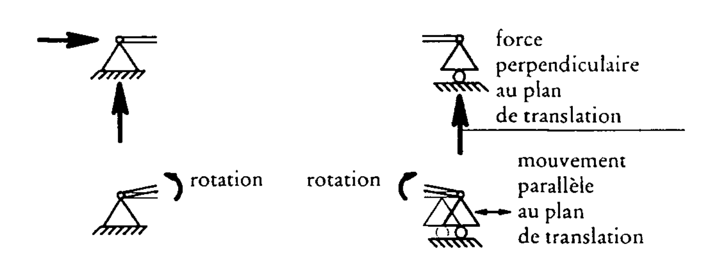
Cintre flottant du pont de Plougastel, 1930, ing. E. Freyssinet (ℓ = 170 m)

Les appuis fixes et les appuis mobiles

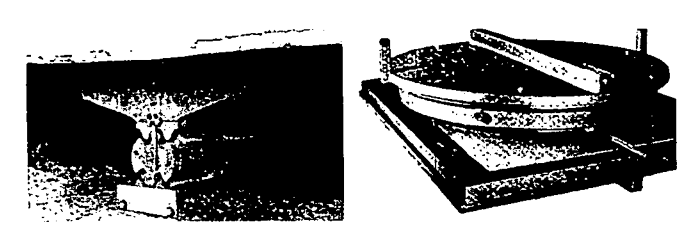
Si une structure de ce type est posée sur le sol, il est opportun de disposer des appuis qui permettent des déplacements horizontaux sans restriction. Sinon, le tirant ne peut pas s'allonger et ne peut donc pas être activé sous l'effet des charges. Si le déplacement est impossible, le fonctionnement est identique à celui de l'arc simple et la composante horizontale de la poussée est transmise directement au terrain.
Si les deux appuis sont mobiles, en revanche, le système devient instable. En effet, une éventuelle charge horizontale qui agirait sur le système ne pourrait pas être reprise, ce qui causerait le déplacement de l'ensemble de la structure.
C'est pourquoi il est opportun de disposer d'un côté un appui fixe, en mesure de reprendre les charges horizontales, et de l'autre côté un appui mobile qui permette le mouvement et l'activation du tirant.
Les articulations à la naissance des arcs (cf. p. 76) sont un exemple typique d'appui fixe. En ces points, la rotation est possible, alors que le déplacement, aussi bien vertical qu'horizontal, est empêché. Ces articulations transmettent ainsi des forces qui peuvent avoir une direction quelconque, avec une composante horizontale et une composante verticale. A partir de maintenant, nous représenterons ces appuis schématiquement par un petit triangle.
Les appuis mobiles sont des constructions qui permettent un mouvement de translation dans une direction, alors qu'ils peuvent transmettre des forces perpendiculairement au plan de translation. Dans les schémas, ces appuis mobiles seront représentés avec un petit triangle posé sur un cercle qui symbolise un rouleau. En effet, dans le passé, ces appuis étaient constitués par des rouleaux en acier qui pouvaient rouler entre deux plaques: la plaque inférieure était fixe alors que la plaque supérieure, fixée à la structure, était mobile. Une autre solution constructive, elle aussi rare de nos jours, consistait en un balancier fixé aux deux extrémités au moyen d'articulations.



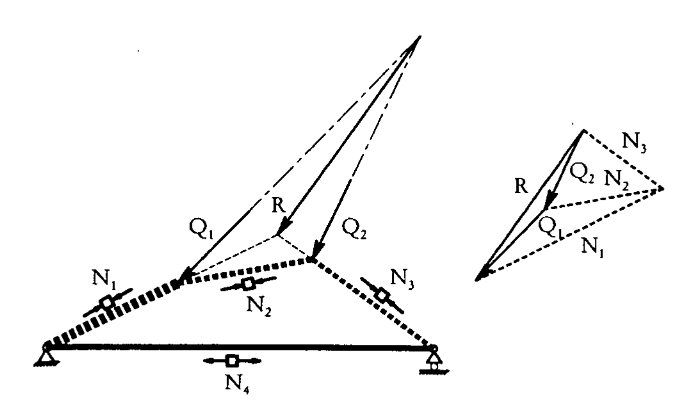
Représentation schématique d'un arc avec tirant, appui fixe à gauche et appui mobile à droite

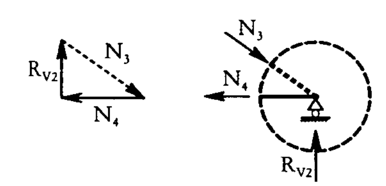


Forces transmises et mouvements possibles dans un appui fixe et dans un appui mobile

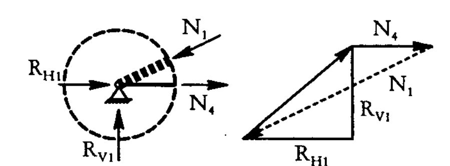


Exemples d'appuis mobiles: appuis à rouleau et appuis avec matériaux à frottement réduit





Détermination du polygone funiculaire et analyse d'un arc avec tirant



Détermination de la force sur l'appui fixe
(N_1 et N_4 déterminés précédemment)

Les appuis mobiles modernes exploitent le très faible angle de frottement entre certaines matières synthétiques (par exemple le Téflon) et des surfaces métalliques bien polies. Avec ces procédés, les forces transversales ne dépassent pas 1/20 de la force transmise perpendiculairement au plan de translation, de sorte que l'on peut parler d'appuis mobiles avec un mouvement pratiquement libre.

Projet et analyse des arcs avec tirant

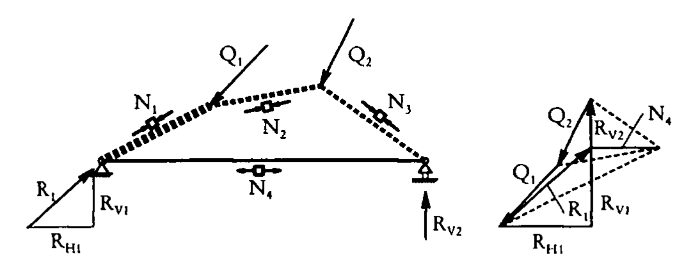
Si nous considérons le fait que le tirant sert principalement à remplacer les structures de contraste dans la fonction de reprendre la composante horizontale de la poussée, le projet et l'analyse d'un arc combiné avec un tirant ne se différencie pas du projet d'un simple arc. Dans ce cas aussi, ce qui a déjà été décrit pour les arcs à propos de leur fonctionnement, de leur forme, du problème de leur stabilité et des solutions structurelles possibles reste donc valable.

La construction géométrique de la forme (polygone funiculaire) et l'analyse peuvent aussi s'effectuer avec le même procédé: détermination de la résultante des charges et de sa ligne d'action (au moyen d'un arc auxiliaire, si les charges ne sont pas parallèles), choix d'un polygone funiculaire de la résultante (correspondant à un triangle) et construction de la zone intermédiaire au moyen du diagramme de Cremona, à partir duquel les intensités des sollicitations sont aussi directement dérivables. Ceci n'est évidemment possible que si l'arc a au moins trois articulations. Si leur nombre est inférieur, l'arc est hyperstatique, et les considérations décrites pour les arcs restent valables.

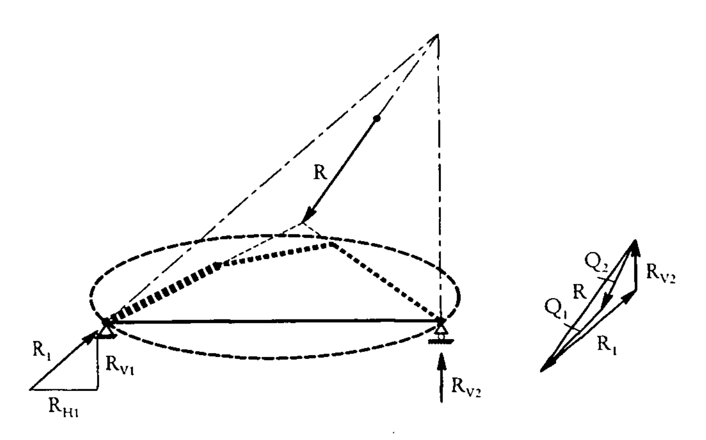
On passe ensuite à la détermination des forces sur les appuis et de l'effort dans le tirant. Ceci s'effectue en considérant tout d'abord un sous-système qui comprend l'appui mobile et qui coupe aussi bien le tirant que l'arc. Puisque l'effort de compression dans l'arc est déjà connu, il reste deux inconnues: la force transmise par l'appui, dont la direction doit être perpendiculaire au plan de translation, et l'effort dans le tirant, dont la ligne d'action doit correspondre à l'axe du tirant.

Si on voulait commencer par le sous-système qui comprend l'appui fixe, le problème resterait indéterminé, à cause de la présence de trois inconnues: l'effort dans le tirant et les deux composantes de la force sur l'appui. A partir de cette considération, il apparaît évident qu'un système soutenu par deux appuis fixes est indéterminé et donc hyperstatique. Dans ce cas, on ne saurait pas depuis quel appui commencer l'analyse.

Une fois la sollicitation du tirant trouvée au moyen de l'analyse du sous-système qui comprend l'appui mobile, l'équilibre de l'autre sous-système avec l'appui fixe devient déterminé, de sorte que l'on peut immédiatement trouver la force d'appui restante avec ses deux composantes.
La figure ci-contre représente le système complet, avec la construction intégrale du diagramme de Cremona.
Si la ligne d'action de la force sur l'appui mobile n'est pas parallèle à celle de la résultante des charges, il est possible de trouver directement les forces sur les appuis, sans devoir trouver d'abord les sollicitations dans l'arc et dans le tirant. Il suffit d'isoler un sous-système qui comprend toute la structure et de considérer que les trois forces qui agissent sur le système (la résultante des charges et les deux forces sur les appuis) sont en équilibre seulement si leurs lignes d'action se rencontrent en un seul point.
Dans ce cas aussi, la solution est rendue possible par la présence d'un appui mobile, pour lequel la ligne d'action de la force est donnée (perpendiculaire à la surface de translation). Si au contraire nous avions deux appuis fixes, pour lesquels les lignes d'action des forces sont indéfinies, le système ne pourrait pas être résolu de cette façon, du fait qu'il serait hyperstatique.



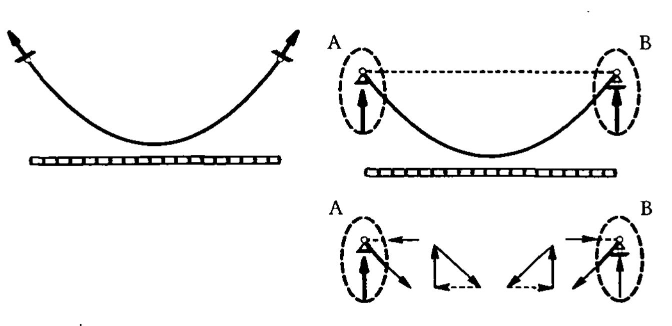
Système complet avec le diagramme de Cremona correspondant



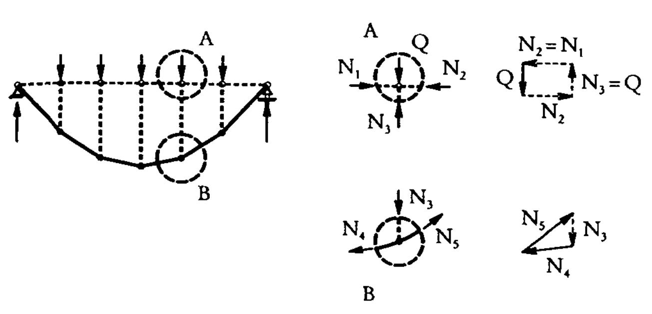
Détermination directe des forces sur les appuis si la surface de translation de l'appui mobile n'est pas perpendiculaire à la résultante des charges

La composition de câbles avec butons

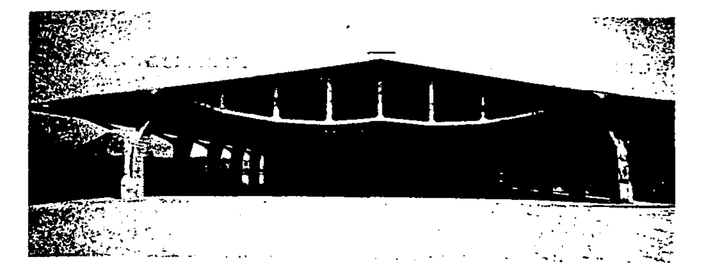
Le nouveau système décrit ci-dessus, résultat de la composition d'un arc avec un tirant, est né de la nécessité d'annuler, ou tout au moins de réduire la composante horizontale de la poussée sur les appuis. Nous avons déjà rencontré le même problème en étudiant les câbles: dans ce cas aussi, les appuis devaient reprendre aussi bien une force verticale qu'une force horizontale.
Cette dernière pourrait être facilement annulée en fixant les deux extrémités du câble non pas directement aux appuis, mais à un élément en mesure de reprendre la composante horizontale de l'effort. Comme représenté ci-contre, cet élément sera sollicité à la compression: il s'agit d'un élément appelé buton.
Nous avons déjà mis plusieurs fois en évidence la forte analogie entre les câbles et les arcs; cette nouvelle structure, composée par un câble et un buton, est elle aussi fort semblable à un arc avec tirant. En particulier, les mêmes considérations sur le dispositif d'appui (un fixe et un mobile, pour garantir l'isostaticité) restent encore valables, de sorte que l'analyse des sollicitations peut s'effectuer exactement de la même façon.



Fonctionnement d'un câble avec buton en comparaison avec un câble simple



Câble avec buton et montants de liaison



Magasins Généraux à Chiasso, 1924, ing. R. Maillart

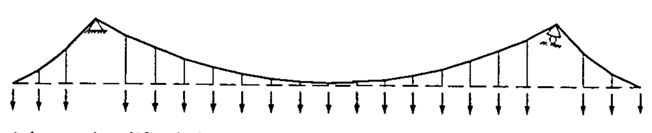
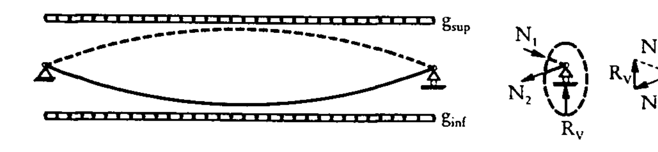


Schéma simplifié de la Cartiera Burgo de P.L. Nervi



Structure composée par un arc et un câble

La charge est en premier lieu reprise par le câble et transmise aux appuis, où le buton est activé comme élément de contraste. Puisque les charges agissent habituellement sur la partie supérieure de la structure (neige, poids propre de la toiture, etc.), il est nécessaire d'avoir des éléments secondaires en mesure de les transmettre directement au câble, qui a comme fonction de les reprendre. Ces éléments sont sollicités à la compression, comme les montants qui relient un arc au tablier d'un pont. Le câble, chargé par ces montants avec des forces concentrées, prend ainsi une forme polygonale. Dans l'exemple ci-contre, les montants de liaison sont bien visibles. Dans ce cas, le buton s'adapte à la forme de la toiture et subit par conséquent une déviation à la mi-portée. La force de déviation correspondante est transmise au câble qui subit, lui aussi, une déviation dans le même sens. Le montant central de liaison est sollicité dans ce cas à la traction.
Nous avons déjà rencontré une autre structure dans laquelle un câble et un buton coagissent dans le cas de la toiture de la Cartiera Burgo de P.L. Nervi (cf. p. 44). Dans ce cas, nous avions des câbles porteurs, soutenus par deux piliers et ancrés au tablier de toiture qui agit aussi comme un buton. Comme le montre le schéma simplifié ci-contre, dans cette situation les charges agissent sur la partie inférieure de la structure, de sorte qu'elles doivent être reportées aux câbles porteurs au moyen des câbles de suspension, de façon analogue à ce qui se produit dans un pont suspendu (cf. p. 44).

La composition d'arcs et de câbles

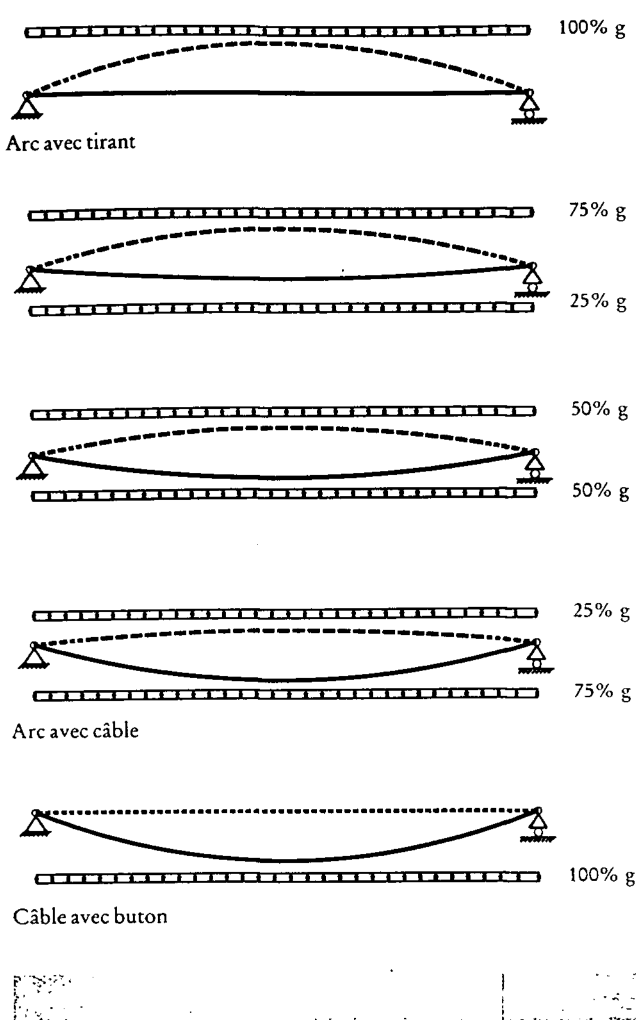
Il est possible de combiner des arcs et des câbles, de façon qu'une partie de la charge soit reprise directement par l'arc, alors que le câble s'occupe de résister à la charge restante. Les poussées des deux éléments peuvent se compenser réciproquement sur les appuis et ne transmettre que des composantes verticales aux appuis, si la structure n'est soumise qu'à des charges elles aussi verticales.

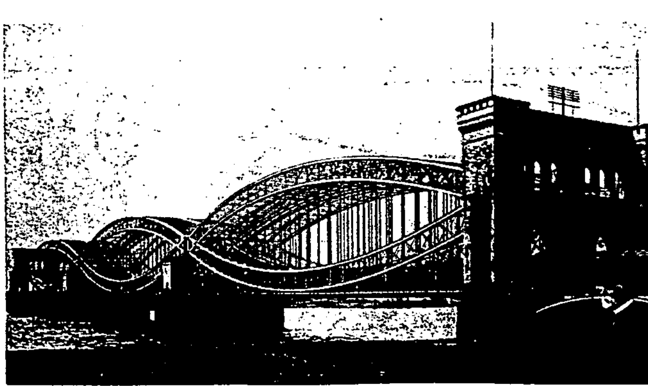
Les structures funiculaires à poussée compensée

La quantité de charge reprise dépend directement de la courbure des deux éléments. Si l'élément est droit, il ne reprend aucune charge directement: le câble devient un tirant et l'arc se transforme en un buton. De ce point de vue, aussi bien l'arc avec tirant que le câble avec buton peuvent être considérés comme des cas limites de cette nouvelle famille de structures: les structures funiculaires à poussée compensée. Il faut remarquer que dans presque toutes les structures considérées jusqu'ici, sous l'action des charges agissant vers le bas, l'élément supérieur est sollicité à la compression alors que l'élément inférieur est tendu. L'exception est représentée pour le moment par la structure de la *Cartiera Burgo*. En effet, nous avons dans ce cas un câble supérieur et un buton inférieur. Nous aurons l'occasion de voir par la suite que cette situation est causée par les deux consoles qui font saillie hors des appuis.

Dans le pont représenté ci-dessous, l'arc et le câble ont la même courbure, de sorte qu'ils contribuent tous les deux de la même façon à la reprise des charges.

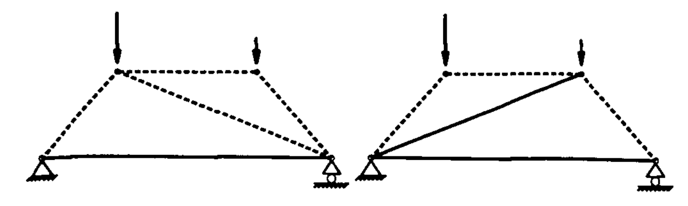
Dans ce cas aussi, comme dans la *Cartiera Burgo*, les charges agissent essentiellement sur la partie inférieure de la structure constituée par le tablier ferroviaire. Il est donc nécessaire d'avoir des câbles verticaux en mesure de suspendre la charge au câble porteur et à l'arc supérieur. L'arc et le câble ont tous deux une grande rigidité, de façon à garantir une stabilité suffisante et à pouvoir résister aussi aux charges non symétriques.



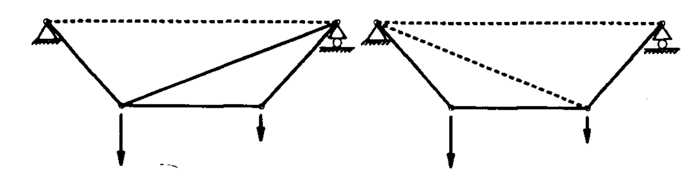


Pont sur l'Elbe à Hambourg, 1872, ing. Lohse, (ℓ = 99,20 m)


Les treillis



Barre supplémentaire qui s'oppose à l'abaissement (à gauche) et au soulèvement de l'arc (à droite)



Barre supplémentaire qui s'oppose à l'abaissement (à gauche) et au soulèvement du câble (à droite)

Solution du problème de la déformabilité et de la stabilité par l'adjonction de barres supplémentaires

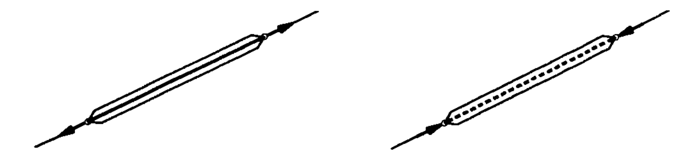
L'exemple qui vient d'être considéré nous rappelle que la déformabilité du câble et l'instabilité de l'arc constituent des problèmes qui se présentent aussi dans les structures funiculaires à poussée compensée. Nous avons déjà décrit des solutions structurales à ces problèmes dans les paragraphes concernant les câbles et les arcs: ces solutions peuvent être aussi appliquées aux structures funiculaires à poussée compensée. Une solution que nous aimerions examiner à nouveau et approfondir est l'adjonction de barres de stabilisation (cf. p. 52 pour les câbles, et p. 71 pour les arcs). Les figures ci-contre montrent deux cas avec une barre supplémentaire comme élément stabilisateur de l'arc. Si la nouvelle barre s'oppose à l'abaissement de l'arc, elle sera sollicitée à la compression. Comme nous l'avons déjà vu (cf. p. 71), le côté opposé tend à se soulever; si nous disposons par conséquent la nouvelle barre dans cette zone, elle sera sollicitée à la traction.
Dans une structure composée d'un câble et d'un buton, la situation s'inverse: la barre supplémentaire qui s'oppose à l'abaissement du câble sera tendue, alors qu'elle sera comprimée si elle est disposée de façon à empêcher le soulèvement.

Les treillis

Les structures considérées dans ce paragraphe présentent une géométrie symétrique des arcs et des câbles, alors que la charge et le polygone funiculaire correspondant ne sont pas symétriques. En d'autres termes, nous sommes encore en présence de structures à poussée compensée, du fait qu'elles sont sollicitées aussi bien à la traction qu'à la compression, mais qui ne sont plus funiculaires. Nous appelerons *treillis* les structures de ce type.
En généralisant, nous pouvons affirmer que les treillis ne doivent pas nécessairement suivre la forme du polygone funiculaire, de sorte que la liberté dont nous disposons pour les projeter augmente sensiblement. Ces structures sont en effet en mesure de résister à n'importe quelle configuration de charges, à condition que celles-ci agissent directement sur les nœuds, définis comme les points où convergent les barres.

Analyse des treillis

Pour analyser les treillis, faisons l'hypothèse que les nœuds fonctionnent comme des articulations: les barres sont en mesure de pivoter autour de ces points, de sorte que la ligne d'action des sollicitations doit nécessairement passer par ces points. Si les barres sont rectilignes d'un nœud à l'autre, et si les charges agissent seulement sur les nœuds, la ligne d'action des sollicitations devra nécessairement passer par deux nœuds aux extrémités et coïncidera par conséquent avec l'axe de la barre.

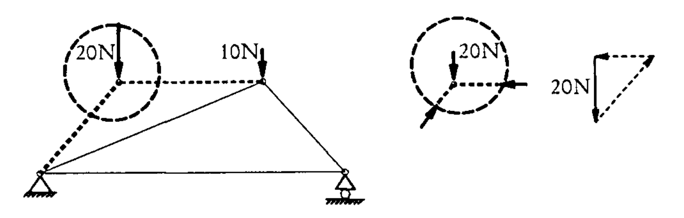


Ligne d'action des sollicitations pour une barre tendue et pour une barre comprimée quand la présence d'articulations aux extrémités est garantie et que les charges agissent uniquement sur les nœuds

En réalité, les treillis ne sont pas toujours construits avec de véritables articulations aux nœuds, les barres étant souvent reliées de façon plus ou moins rigide les unes aux autres. L'hypothèse que nous avons formulée n'est donc pas exactement satisfaite, mais la différence de sollicitation qui en découle est presque toujours négligeable. En d'autres termes, la déviation de la ligne d'action de la sollicitation par rapport à l'axe de la barre est minime.

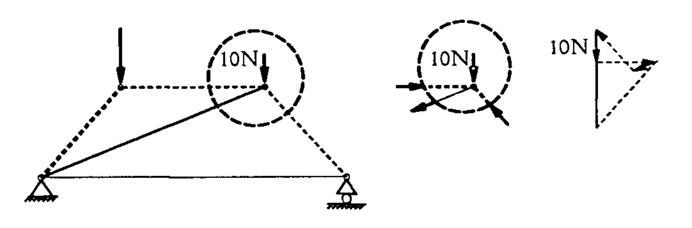
L'analyse des sollicitations peut commencer en considérant l'équilibre d'un sous-système qui comprend un nœud et qui coupe toutes les barres qui y convergent. Nous avons déjà vu que le problème ne peut être résolu que si l'on a au maximum deux inconnues. Nous devons donc commencer avec un nœud qui relie seulement deux barres et sur lequel agissent des forces extérieures connues. Si le nœud correspond à un appui, nous devons tout d'abord déterminer les forces transmises par les appuis, grâce à la méthode que nous montrerons plus loin.

Dans le cas représenté ci-contre, nous pouvons commencer par un sous-système qui comprend le nœud en haut à gauche et qui coupe deux des barres qui composaient initialement l'arc. Nous ne devons donc pas être surpris du fait qu'en analysant le diagramme de Cremona et en reportant les efforts ainsi obtenus sur le sous-système, nous obtenions des efforts de compression.



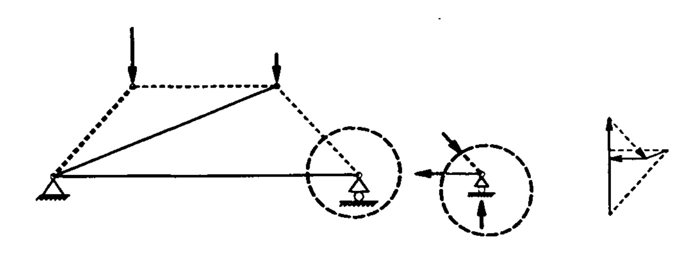
Premier pas de l'analyse: sous-système qui comprend seulement deux inconnues

Nous pouvons maintenant analyser un second sous-système qui comprend le nœud en haut à droite. Des trois barres reliées entre elles, une subit un effort déjà connu, de sorte que le problème peut maintenant être résolu. En complétant le diagramme de Cremona et en reportant les forces sur le sous-système, nous constatons que la barre diagonale que nous avons introduite est sollicitée à la traction. Ceci confirme ce que l'on pensait intuitivement: la barre qui s'oppose au soulèvement est tendue.

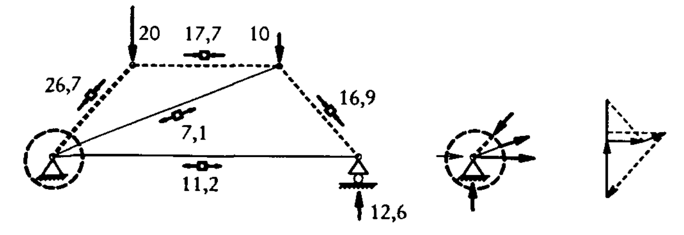


Second pas de l'analyse: sous-système qui comprend trois barres, dont une a déjà été prise en considération précédemment

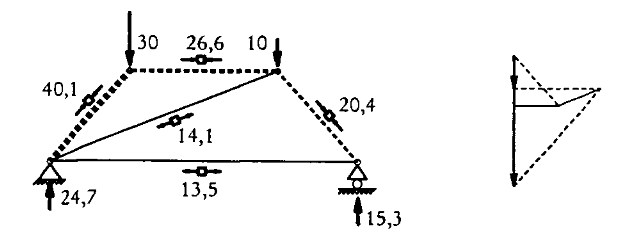
Le prochain sous-système inclut nécessairement un appui. L'appui de gauche est caractérisé par trois inconnues, qui comprennent une nouvelle barre (le tirant) et la force transmise par l'appui fixe avec ses deux composantes. En revanche, seules deux inconnues agissent sur le sous-système avec l'appui mobile: l'effort dans le tirant et la force transmise par l'appui qui doit être nécessairement perpendiculaire au plan de translation. Nous allons donc analyser en premier ce sous-système-là.


Troisième pas de l'analyse: sous-système avec l'effort d'une nouvelle barre et la force transmise par l'appui mobile comme inconnues

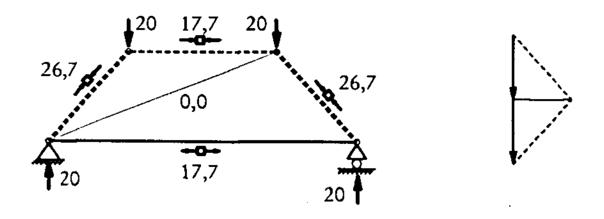
Une fois l'effort dans le tirant déterminé, nous connaissons désormais les efforts dans toutes les barres. Le fonctionnement de la structure est désormais bien lisible dans le



Fin de l'analyse avec la détermination de la force sur l'appui fixe (charges et efforts en Newton)



Efforts avec la charge à gauche augmentée



Situation avec le polygone funiculaire des charges semblable à la forme de l'arc

schéma ci-contre, dans lequel nous avons représenté, avec des traits différents, la traction et la compression, et dans lequel l'épaisseur des traits est proportionnelle à l'intensité de l'effort. A ce point, la structure peut être dimensionnée en comparant les efforts à la résistance spécifique du matériau prévu.

Pour terminer l'analyse du système, il ne reste qu'à déterminer les forces transmises par l'appui fixe, en isolant un sous-système dans cette zone.

Dans ce cas particulier, où toutes les charges sont verticales et où l'appui mobile transmet une force elle aussi verticale, la composante horizontale de la force sur l'appui fixe sera nécessairement nulle. Ceci est également clairement visible dans le diagramme de Cremona, la force d'appui résultant directement de la clôture du dernier polygone.

Si nous modifions les charges agissantes tout en maintenant la même structure, il faudra répéter le procédé d'analyse. La figure ci-contre montre la situation finale du diagramme de Cremona et de la structure avec les efforts complets pour un cas de charge avec la force à gauche augmentée à 30 N. Comme on le voit, tous les efforts sont modifiés par rapport au cas précédent. On peut observer que nous aurions pu obtenir le même résultat en analysant uniquement les efforts dus à l'augmentation de 10 N de la charge à gauche, pour ensuite les ajouter aux efforts du cas précédent. Ce principe de superposition vaut toujours dans le cas des structures isostatiques avec déplacements négligeables et dans les structures hyperstatiques à comportement linéaire.

Il est intéressant de constater que l'augmentation de la charge à gauche cause un éloignement du polygone funiculaire des charges de la géométrie de l'arc, de sorte que l'intensité de l'effort dans la barre que nous avons ajoutée pour garantir la stabilité doit nécessairement augmenter.

Si nous augmentons en revanche la charge à droite, de façon à obtenir une configuration symétrique, nous aurons le polygone funiculaire qui, de nouveau, coïncide avec la forme de l'arc. Dans ce cas, la barre supplémentaire ne sera simplement pas sollicitée: nous avons de nouveau une structure funiculaire à poussée compensée.

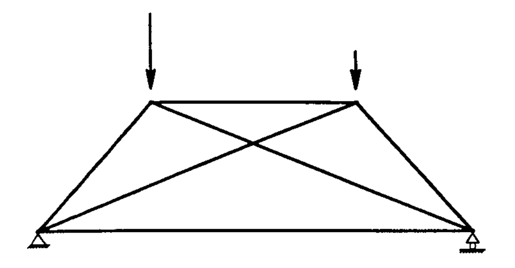
Systèmes labiles, isostatiques ou hyperstatiques

En ajoutant encore une barre à la structure que nous venons d'analyser, nous obtenons une situation dans laquelle trois barres convergent vers chaque nœud. Il semble donc impossible d'isoler un sous-système avec seulement deux inconnues: une structure de ce type est en effet hyperstatique. Comme nous l'avons déjà vu, en analysant dans le plan un sous-système qui comprend un seul nœud, nous pouvons déterminer au maximum deux inconnues, qui peuvent être des efforts dans les barres ou des forces de réaction sur les appuis. Ceci dérive du fait que toutes les forces considérées satisfont déjà la condition selon laquelle les lignes d'action doivent converger en un seul point (le nœud même), alors que l'analyse de l'équilibre avec le diagramme de Cremona ne permet de trouver que deux nouvelles inconnues. A partir de cette considération, nous pouvons déduire une règle qui nous permet de vérifier si un système dans le plan est labile (instable), isostatique (statiquement déterminé) ou hyperstatique (statiquement indéterminé). En comparant le nombre d'inconnues effectivement présentes avec celles que nous pouvons déterminer au moyen des sous-systèmes, nous pouvons donc affirmer que:

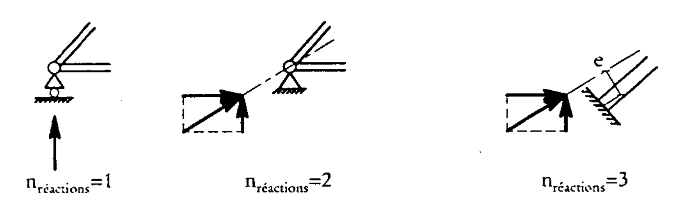
- si $n_{réactions} + n_{barres} < 2 \cdot n_{nœuds}$ le système est labile;
- si $n_{réactions} + n_{barres} = 2 \cdot n_{nœuds}$ le système est isostatique;
- si $n_{réactions} + n_{barres} > 2 \cdot n_{nœuds}$ le système est hyperstatique.

Il faut remarquer que par « nombre de réactions » on considère le nombre de composantes de la force transmise par un appui. Un appui mobile transmet uniquement une force perpendiculaire au plan de déplacement: ceci signifie que $n_{réactions} = 1$. Sur un appui fixe peut en revanche agir une force avec deux composantes, de sorte que $n_{réactions} = 2$. Si dans un appui fixe nous bloquons aussi l'articulation, de sorte que non seulement les déplacements, mais aussi la rotation est empêchée, les inconnues seront représentées par les deux composantes de la force et par la position de sa ligne d'action, qui ne passera plus nécessairement par l'appui même. Dans ce cas, nous avons une situation appelée encastrement, pour laquelle $n_{réactions} = 3$ (cf. les arcs sans articulation).

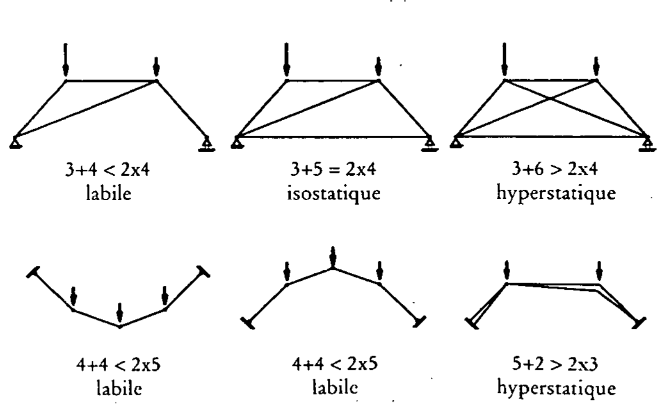
Comme le montrent les exemples ci-contre, ce procédé pour vérifier l'isostaticité du système peut être adopté pour n'importe quel type de structure. Il est intéressant d'observer qu'un câble soumis à plusieurs charges doit être considéré, de ce point de vue, comme une structure avec un haut degré de labilité. En effet, la position d'équilibre est atteinte seulement à la suite de déplacements qui peuvent être importants. Dans le cas de l'arc avec plus de trois articulations, la labilité implique, par contre, l'instabilité.



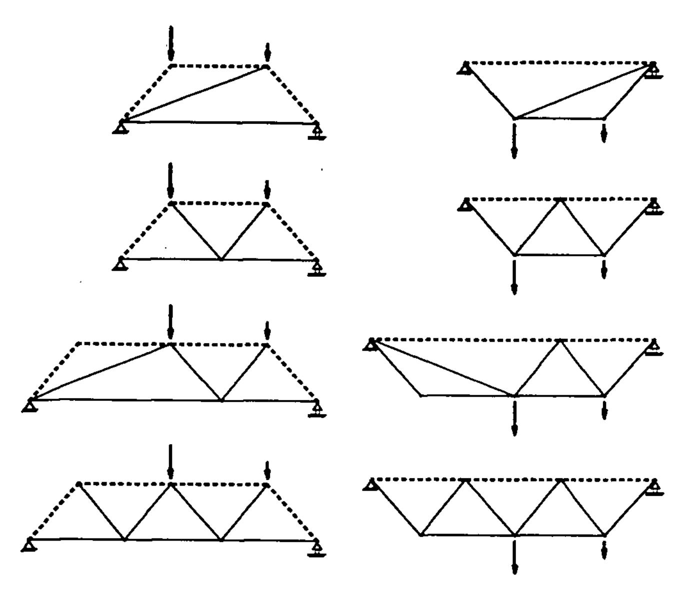
Système funiculaire à poussée compensée, avec deux barres supplémentaires: système hyperstatique



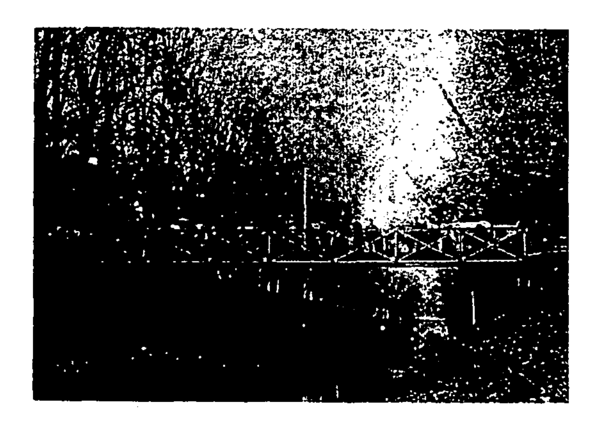
Inconnues présentes dans un appui mobile, dans un appui fixe et dans un encastrement



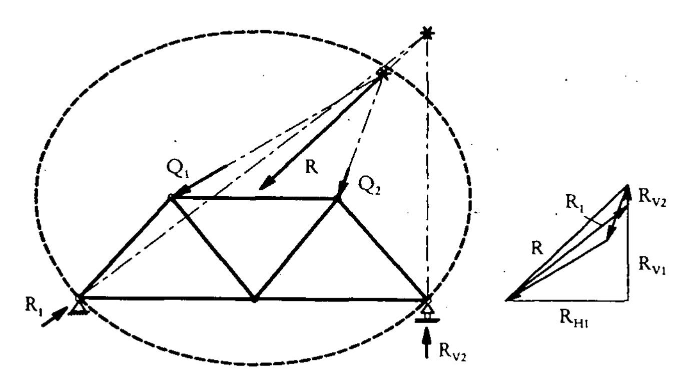
Vérification de l'isostaticité pour différents systèmes structuraux



Treillis isostatiques



Passerelle sur le canal Michelotti à Turin, 1884, ing. G. Eiffel



Sous-système qui comprend toute la structure

Les inéquations proposées, en plus de nous permettre de vérifier si une structure est labile, isostatique ou hyperstatique, représentent une aide utile pour projeter une structure stable.

Génération des treillis

Revenons aux treillis composées d'un arc, d'un tirant et d'une seule barre ajoutée, nécessaire pour garantir la stabilité. Nous avons vu qu'avec trois inconnues sur les appuis, cinq barres et quatre nœuds, la condition $n_{réactions} + n_{barres} = 2 \cdot n_{nœuds}$ est satisfaite. Si nous voulons ajouter d'autres barres, sans compromettre l'isostaticité, nous devons introduire un nouveau nœud pour chaque paire de barres supplémentaires. Dans la première structure ci-contre, nous pouvons introduire un nouveau nœud au milieu du tirant et ajouter une nouvelle barre stabilisatrice. Si nous considérons que le tirant est maintenant constitué de deux barres, le principe d'isostaticité est de nouveau satisfait.

Nous pouvons de nouveau modifier la structure en ajoutant un nœud et deux barres, cette fois dans la partie supérieure de l'arc. Evidemment, le procédé peut être répété à l'infini, en obtenant toujours des structures isostatiques.

Le treillis constitué par un câble, un buton et une barre stabilisatrice peut également subir la même métamorphose et générer une série de systèmes tous isostatiques.

Si nous observons les nouvelles structures ainsi obtenues et si nous les comparons aux structures originelles, nous constatons une particularité qui leur est commune: les barres forment toujours des triangles disposés l'un à côté de l'autre. C'est pour cette raison que ces structures sont appelées *systèmes triangulés* ou *treillis*.

Introduits vers le XVI[e] siècle comme systèmes porteurs pour les ponts et les toitures en bois, les treillis ont eu un important développement au XIX[e] siècle, grâce à l'emploi de l'acier et à leur grande efficacité.

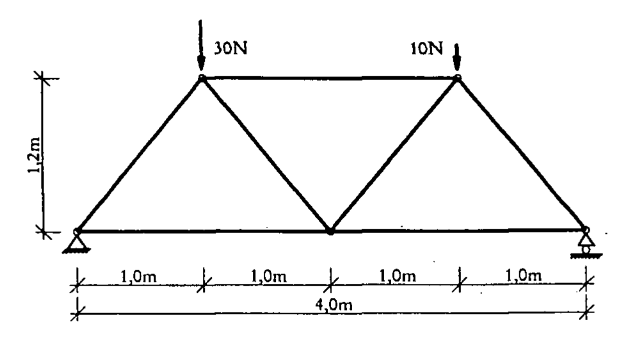
L'analyse générale des treillis

Le procédé décrit précédemment pour l'analyse d'un treillis simple composé d'un arc, d'un tirant et d'une barre ajoutée peut naturellement s'appliquer à toutes les structures de ce type. Comme nous l'avons vu, le premier pas consiste à analyser un sous-système sur lequel agissent seulement deux inconnues. Souvent, les nœuds sur lesquels convergent seulement deux barres correspondent aux appuis. Dans ce cas, il est d'abord indispensable de déterminer les forces transmises par les appuis eux-mêmes. Comme nous l'avons vu dans le cas des structures funiculaires à poussée compensée, si la résultante des charges n'est pas parallèle à la force transmise par l'appui mobile, il est possible de considérer un sous-système qui

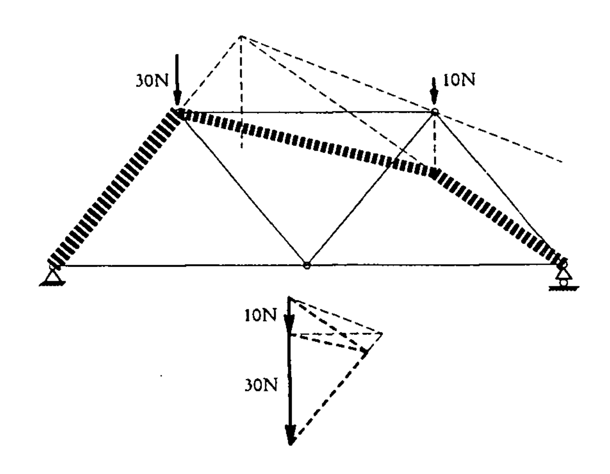
comprend toute la structure et de déterminer les forces d'appui, en tenant compte du fait que les lignes d'action des trois forces impliquées doivent converger en un seul point. Dans ce cas, il faut noter qu'en analysant un seul sous-système nous pouvons déterminer directement non pas deux, mais trois inconnues. Ceci est possible du fait que nous pouvons aussi utiliser, dans ce cas, la condition qui lie entre elles les lignes d'action. Ceci nous permet de déterminer la direction de la force sur l'appui fixe, en réduisant de fait cette force-là à une seule inconnue (intensité de la force avec direction connue). Si en revanche, la résultante des charges est parallèle à la force sur l'appui mobile, le point de convergence entre les trois lignes d'action se trouve à l'infini, de sorte que ce procédé est inapplicable.

Dans ce cas, la solution analytique du problème constitue une bonne alternative (voir l'annexe 2 à la page 229). Si on souhaite continuer à utiliser les instruments de la statique graphique, comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant, il est possible de remplacer le treillis par un système funiculaire à poussée compensée, et de déterminer les forces sur les appuis avec la méthode adoptée pour ces structures. Ceci est possible grâce à une propriété importante des systèmes isostatiques: pour un jeu de charges et une configuration des appuis donnés, l'intensité et la direction des forces transmises par les appuis sont indépendantes du type de structure. Pour mieux comprendre cette propriété, il faut se rappeler que les forces sur les appuis peuvent être déterminées en isolant un sous-système qui comprend la structure dans son ensemble. Le type de structure compris à l'intérieur du sous-système n'a donc aucune influence sur les inconnues que l'on cherche. Le premier pas consiste par conséquent à construire un arc funiculaire (ou un câble) par le procédé bien connu: détermination de la ligne d'action de la résultante au moyen d'un arc auxiliaire et construction de l'arc funiculaire, en considérant que les deux barres à proximité des appuis, si on les prolonge, doivent converger sur la ligne d'action de la résultante. Pour permettre une comparaison facile entre le fonctionnement du système funiculaire à poussée compensée et celui du treillis que nous voulons analyser, choisissons comme flèche de l'arc funiculaire la hauteur du treillis. Dans le cas que nous sommes en train d'analyser, ceci signifie que les sollicitations dans les barres à proximité de l'appui fixe sont les mêmes dans les deux systèmes structuraux.

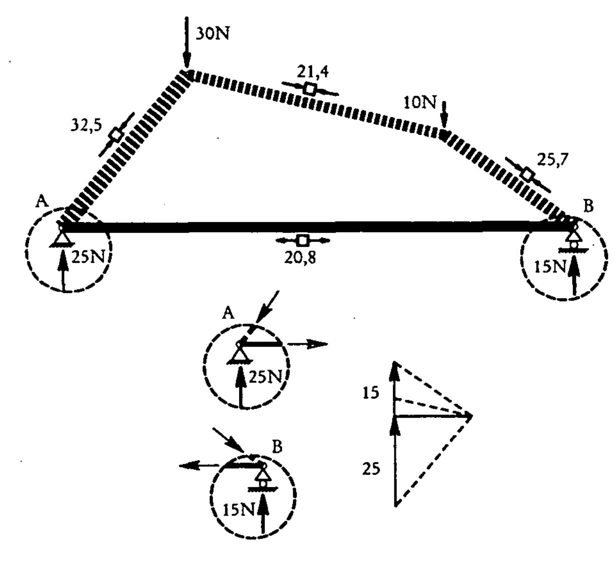
Nous pouvons ensuite déterminer les forces transmises par les appuis en isolant des sous-systèmes qui les incluent. Considérons tout d'abord l'appui mobile, dans lequel les



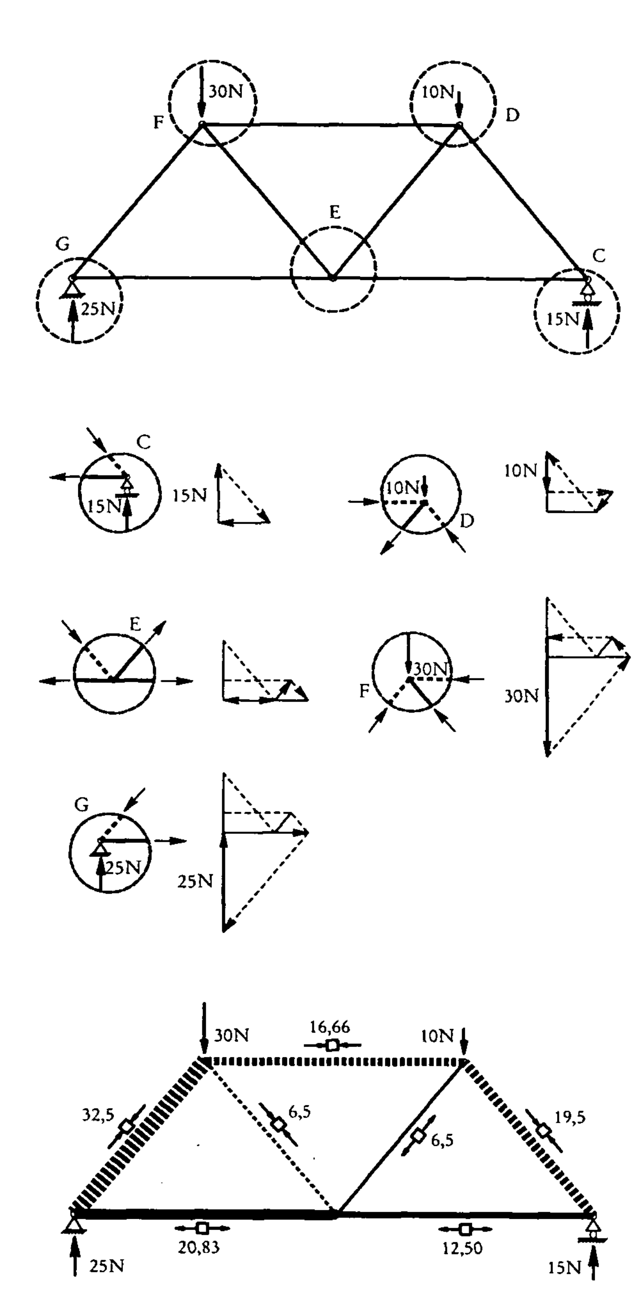
Treillis avec la résultante des charges parallèle à la force sur l'appui mobile



Premier pas: construction de l'arc funiculaire



Second pas: détermination de l'effort dans le tirant et des forces transmises par les appuis



Détermination des efforts dans les barres en analysant un système après l'autre

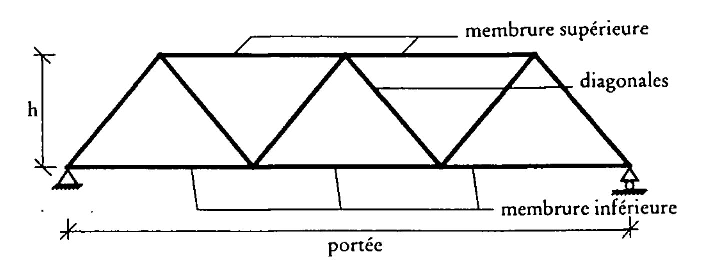
inconnues sont représentées par l'effort dans le tirant et par la force perpendiculaire au plan de translation. Ensuite, poursuivons le procédé en analysant l'appui fixe dans lequel les inconnues se réduisent aux deux composantes de la force, du fait que l'effort dans le tirant est désormais connu.
Une fois les forces transmises par les appuis déterminées (15 N par l'appui mobile et 25 N par l'appui fixe), nous pouvons les reporter dans le treillis à analyser et commencer l'étude des sollicitations, en considérant un des deux sous-systèmes qui comprennent un appui. Puisque les forces sur les appuis sont connues, les deux sous-systèmes ne comprennent que deux inconnues, de sorte que l'on peut commencer indifféremment par l'un ou par l'autre.
Dans la solution ci-contre, considérons en premier l'appui mobile avec le sous-système C qui nous permet de déterminer les efforts dans le tirant à droite et dans la dernière barre de l'arc. Nous observons que la sollicitation dans cette partie du tirant ne correspond pas à la sollicitation déterminée précédemment pour le système funiculaire à poussée compensée.
Nous pouvons ensuite passer au sous-système D qui comprend le nœud en haut à droite, et ainsi de suite, isolant un sous-système après l'autre, nous pouvons déterminer toutes les sollicitations dans la structure. Pour finir, analysons le sous-système G qui comprend l'appui fixe. Dans ce cas, nous n'avons plus de nouvelles inconnues, de sorte qu'avec ce sous-système nous pouvons vérifier le travail effectué.
Pour faciliter la compréhension, nous avons redessiné et complété ci-contre le diagramme de Cremona chaque fois que nous sommes passés à un nouveau sous-système. Evidemment, pour gagner du temps ou pour limiter les imprécisions dues à la répétition du dessin, il vaudrait mieux construire un seul diagramme de Cremona.
La dernière figure, dont le graphisme met en évidence les sollicitations de traction et de compression et en utilisant des traits de largeur proportionnelle à l'intensité de l'effort, permet de visualiser le fonctionnement de la structure. Par exemple, il est encore possible de reconnaître l'arc sollicité à la compression et le tirant. Notons que l'intensité de la traction varie sur la longueur du tirant.

Membrure supérieure, membrure inférieure et diagonales

Nous avons construit les treillis en combinant arcs, tirants, câbles, butons et barres supplémentaires qui servent à stabiliser la structure et à la rendre isostatique. Cette approche est très utile pour appliquer ce que nous avons appris avec les câbles et les arcs, de façon à mieux comprendre le fonctionnement des treillis.

En parlant de treillis, nous devons toutefois introduire de nouveaux termes: les barres supérieures de l'arc font partie de la *membrure supérieure*. De façon analogue, le tirant est défini comme *membrure inférieure*, alors que les barres qui relient les deux membrures sont appelées *diagonales*.

La distance entre la membrure inférieure et la membrure supérieure, qui correspond à la flèche de l'arc, est définie comme *hauteur* du treillis. On parle de treillis à hauteur constante quand les membrures sont parallèles.



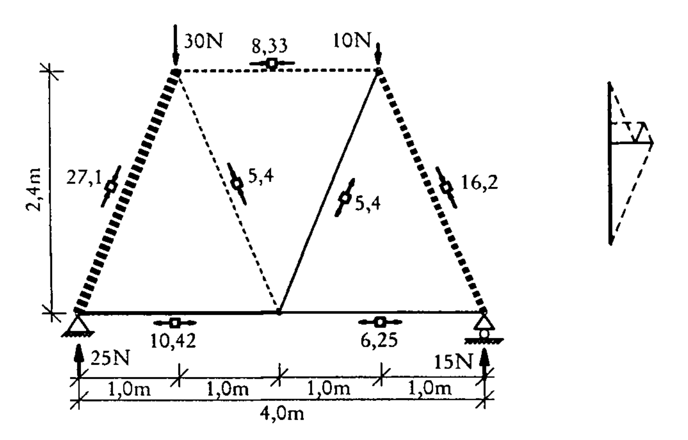
Treillis avec membrure supérieure, membrure inférieure et diagonales

L'influence de la hauteur et de la portée sur les sollicitations dans les treillis

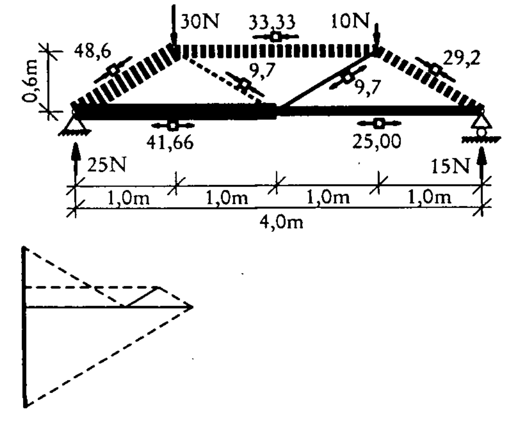
Nous avons déjà vu, dans le cas des câbles et des arcs soumis à des charges verticales, que la composante horizontale des efforts est directement proportionnelle à la portée et inversément proportionnelle à la flèche. En d'autres termes, si on double la portée, ou si on réduit de moitié la flèche, on obtient des efforts doubles.

Pour les treillis, les mêmes relations entre les sollicitations dans les membrures, la hauteur et la portée restent valables. Les analyses de deux treillis, semblables à celui que nous venons d'analyser, dans lequel la hauteur est doublée et, respectivement, diminuée de moitié sont montrées ci-contre. Dans le diagramme de Cremona qui se réfère au treillis avec une hauteur double, il est clairement visible que toutes les composantes horizontales des efforts sont réduites de moitié. De façon analogue, en diminuant de moitié la hauteur, on obtient des efforts doubles dans les membrures.

Rappelons-nous que le diagramme de Cremona, pour des charges égales, dépend uniquement de l'inclinaison des diverses barres et de l'intensité des charges, alors qu'il est indépendant des dimensions absolues. C'est pourquoi une réduction de moitié de la hauteur produit, dans notre cas, le même effet sur les sollicitations qu'un doublement de la portée. Les sollicitations dans un treillis avec une portée ℓ = 4,00 m et une hauteur h = 0,60 sont donc identiques à celles d'un treillis soumis aux mêmes charges et avec les dimensions ℓ = 8,00 m et h = 1,20 m.

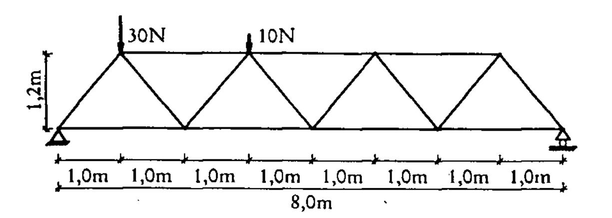


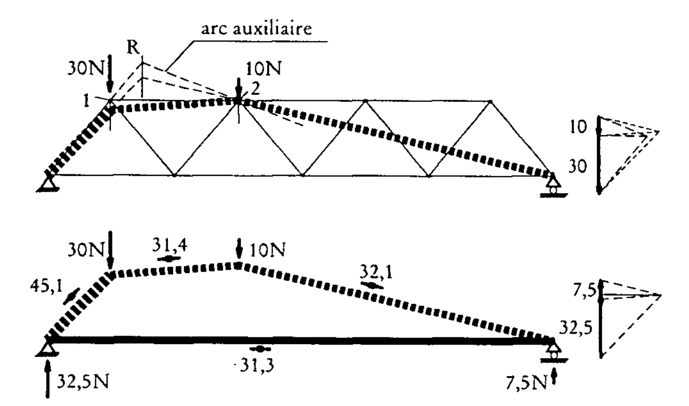
Treillis avec hauteur doublée



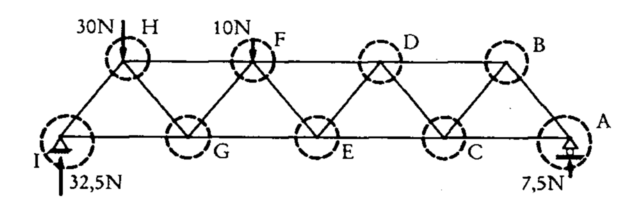
Treillis avec hauteur réduite de moitié (ou portée doublée)

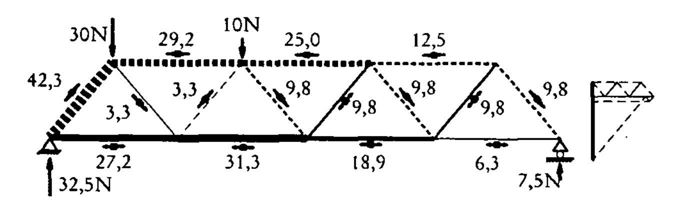
Analyse complète d'un treillis





Treillis à membrures parallèles et arc funiculaire avec tirant





Analyse complète du treillis au moyen de sous-systèmes qui comprennent un seul nœud

Nous pouvons entreprendre l'analyse d'un treillis avec un nombre quelconque de barres avec le même procédé, pour autant que la structure soit isostatique. Comme nous l'avons vu, nous devons commencer l'analyse à partir des nœuds avec seulement deux barres, de façon à avoir seulement deux inconnues. Si ces nœuds correspondent aux appuis et si la résultante des charges est parallèle aux forces transmises par les appuis, il est d'abord nécessaire de déterminer ces forces au moyen d'un système funiculaire à poussée compensée.

Par la suite, nous verrons comment ce système statique facile à construire est fort utile pour la compréhension du fonctionnement du treillis. Sa construction est donc conseillée, même quand elle n'est pas indispensable pour l'analyse du treillis (nœuds avec deux barres qui ne correspondent pas aux appuis, ou bien résultante des charges non parallèle aux forces sur les appuis).

Dans l'exemple reporté ci-contre, nous avons choisi un arc funiculaire avec une flèche égale à la hauteur du treillis. Ceci permettra une comparaison directe des sollicitations dans les deux systèmes.

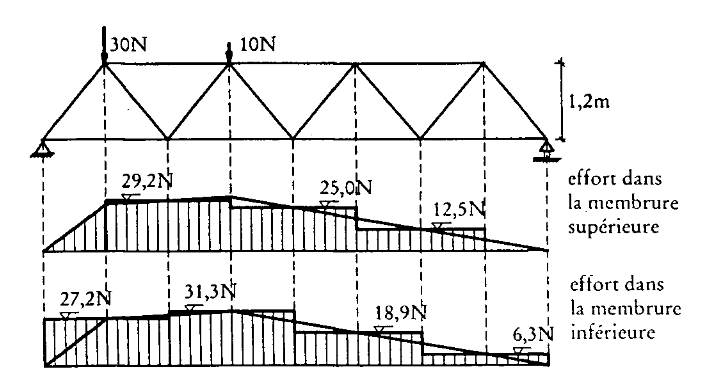
On peut constater que la flèche maximale de l'arc est atteinte sur la ligne d'action de la charge de 10 N et non pas, comme dans l'exemple précédent, au droit de l'autre charge de 30 N. Si nous voulons construire un arc avec une flèche égale à h = 1,20 m, nous devons donc tracer un tronçon de l'arc qui relie l'appui à droite et le nœud 2. En prolongeant cette barre jusqu'à la ligne d'action de la résultante, on obtient un point qui, relié à l'appui à gauche, permet de construire le dernier tronçon de l'arc.

Après avoir déterminé les forces qui soutiennent la structure au moyen des appuis, nous pouvons commencer à calculer les sollicitations dans les barres en analysant un sous-système après l'autre. Pour notre treillis avec neuf nœuds, nous devons donc analyser autant de sous-systèmes. En réalité, nous pourrions nous limiter à huit sous-systèmes, dans la mesure où le dernier ne contient aucune nouvelle inconnue, son analyse servant donc seulement de contrôle.

Le résultat de l'analyse est résumé dans le schéma ci-contre, dans lequel les barres sont représentées avec une épaisseur proportionnelle aux sollicitations, comme si les barres étaient effectivement dimensionnées selon cette proportion ($A = N_d/f_d$).

Il est intéressant d'observer que les sollicitations dans les quatre barres qui composent la membrure inférieure subissent une variation considérable, d'un minimum de 6,3 N à

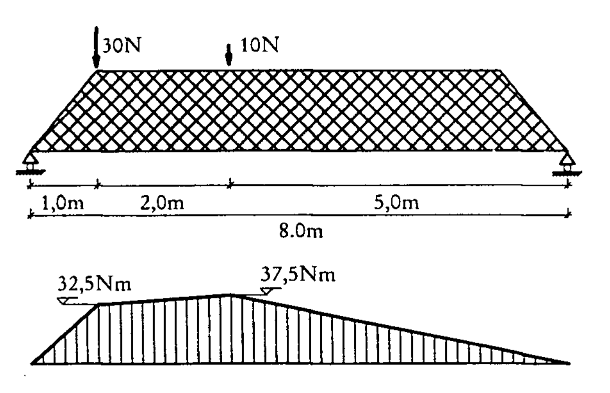
proximité de l'appui à droite, jusqu'à un maximum de 31,3 N dans la zone centrale.
Si nous comparons ces efforts avec celui du tirant dans le système funiculaire à poussée compensée, nous constatons que l'intensité maximale coïncide, mais que la répartition des charges est fort différente (constante sur toute la longueur du tirant dans le cas de la structure à poussée compensée).
On remarque en revanche une forte analogie entre le diagramme des efforts dans la membrure inférieure et la forme de l'arc funiculaire. Pour comprendre cette situation, qui n'est certainement pas un hasard, nous devons revenir à la relation qui existe entre la hauteur h du treillis et l'effort N dans les membrures: les deux grandeurs sont inversement proportionnelles (si on double h on a une réduction de moitié de N et vice versa).



Répartition des efforts dans la membrure inférieure et dans la membrure supérieure

Le moment de flexion

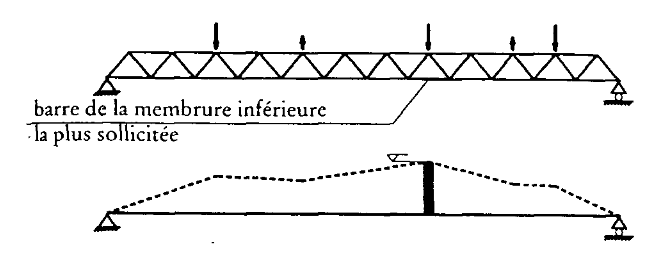
Ceci revient à dire que le produit de h et N est indépendant du treillis choisi. En effet, cette grandeur, quantifiée en Nm et définie comme le *moment de flexion* dans la statique des constructions, dépend uniquement des charges et de la portée, alors qu'elle reste inchangée si on modifie la structure. Pour un treillis à membrures parallèles, pour une structure funiculaire à poussée compensée (par exemple un arc funiculaire avec tirant) et même pour n'importe quelle structure avec les mêmes charges et les mêmes appuis, on a donc un moment de flexion égal (intensité et répartition identiques sur toute la longueur de la structure). Les deux structures analysées sont en réalité deux cas particuliers: dans le cas du treillis, la hauteur h est constante, de sorte que l'effort N suit la répartition du moment de flexion, alors que dans le cas de la structure à poussée compensée, l'effort N dans le tirant étant constant, on a une distribution de la hauteur h semblable à la répartition du moment de flexion.
Dans la statique des constructions, on a développé des procédés qui permettent de calculer le moment de flexion en n'importe quel point de la structure, sans passer par la construction de l'arc funiculaire et la détermination des sollicitations dans les membrures (cf. annexe 3 à la p. 230). Cette approche, plus liée aux exigences de l'ingénieur, est différente de celle que nous entendons suivre. Dans ce qui suit, nous utiliserons les propriétés de l'arc funiculaire pour faciliter la compréhension des structures que nous analyserons, et nous laisserons de côté l'utilisation du moment de flexion.



Répartition du produit N · h (moment de flexion) pour le treillis, l'arc avec tirant et n'importe quelle structure avec les mêmes charges et les mêmes appuis

La détermination des barres les plus sollicitées dans les membrures

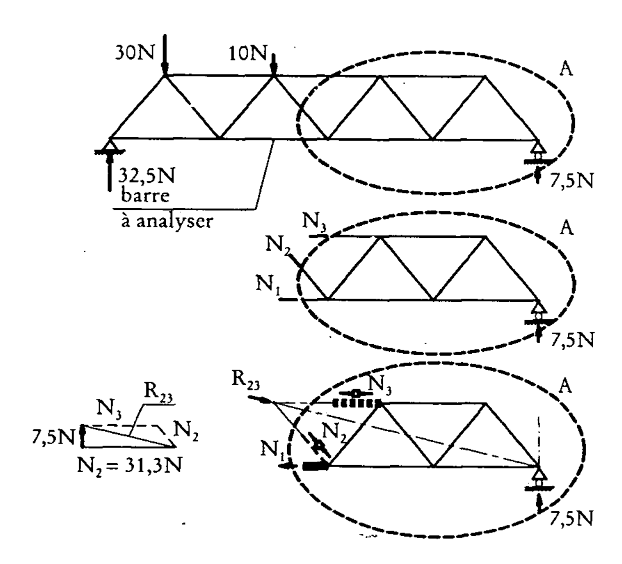
La similitude entre la forme de l'arc funiculaire et la répartition des sollicitations dans les membrures parallèles d'un treillis est utile pour trouver les barres les plus sollicitées dans les membrures. Une fois établi quel point dans l'arc funiculaire présente la hauteur la plus grande, définie comme la distance par rapport au tirant, nous pouvons immédiatement déterminer les barres des membrures qui sont les plus sollicitées.
Cette possibilité devient fort utile si le treillis comporte de nombreuses barres, de sorte qu'une analyse complète exigerait l'étude laborieuse de très nombreux sous-systèmes (cf. l'exemple ci-contre).
Si les membrures ne sont pas parallèles (hauteur du treillis variable), la détermination des barres les plus sollicitées devient plus complexe. Il est en effet nécessaire de déterminer les barres pour lesquelles le rapport entre la hauteur de l'arc funiculaire et la hauteur réelle du treillis est maximal.



Détermination des barres les plus sollicitées dans les membrures au moyen de l'analogie avec l'arc funiculaire

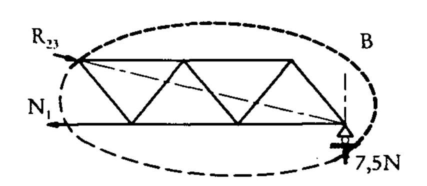
L'analyse spécifique de barres des membrures dans les treillis

Une fois la barre la plus sollicitée déterminée, et après avoir trouvé les forces sur les appuis, il est possible de calculer directement l'intensité de l'effort au moyen d'un sous-système choisi de façon opportune. Celui-ci devra nécessairement couper la barre que nous entendons analyser.
Le sous-système A représenté ci-contre satisfait cette exigence: sur lui agissent l'effort de la barre la plus sollicitée, celui de deux autres barres et la force transmise par l'appui mobile. Si cette force a déjà été calculée, il ne reste que trois inconnues à déterminer. Dans ce cas, la solution est possible si on considère les deux conditions d'équilibre: les forces doivent s'annuller vectoriellement et les lignes d'action des trois forces en équilibre doivent converger en un point. Etant donné que quatre forces sont impliquées, dont une est déjà connue, nous devons tout d'abord composer deux forces en une résultante partielle, de façon à obtenir, dans une première phase, seulement trois forces, avec trois lignes d'action. Nous pouvons par exemple considérer la résultante partielle R_{23} des deux efforts N_2 et N_3 qui pour le moment ne nous intéressent pas. Sa ligne d'action devra passer par le nœud où se rencontrent les deux barres et, en même temps, passer par l'intersection de l'effort N_1 et de la force sur l'appui. Une fois cette ligne d'action définie, le problème se réduit à la détermination de deux inconnues (N_1 et R_{23}) dont les lignes d'action connues.
Le polygone des forces qui nous permet de trouver immédiatement les deux inconnues, dont une est l'effort dans la barre de la membrure inférieure la plus sollicitée, peut éventuellement être complété en décomposant la résultante

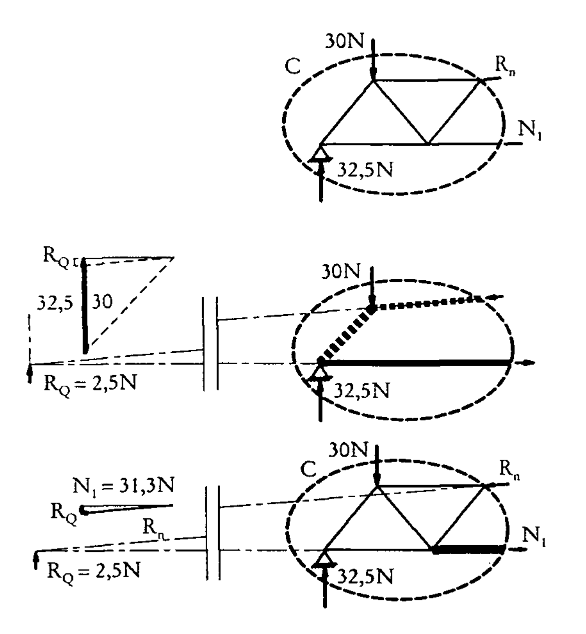


Détermination directe de la sollicitation d'une barre quelconque

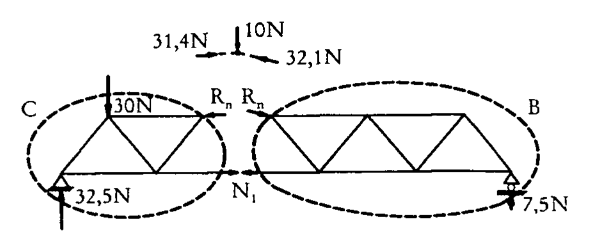
partielle R_{23}, de façon à déterminer aussi les efforts dans la diagonale et dans la membrure supérieure (N_2 et N_3).
Il faut observer que la résultante R_{23} correspond à l'effort que l'on aurait obtenu si l'on avait choisi le sous-système B. Comme le sous-système A, il coupe la barre que nous avons l'intention d'analyser, mais au lieu de couper la diagonale et la membrure supérieure, il coupe le nœud. Ceci signifie que la résultante partielle R_{23} n'est rien d'autre que l'effort présent dans le nœud. L'analyse du sous-système B est par conséquent le mode le plus direct pour déterminer la sollicitation dans la barre qui nous intéresse.
Si plusieurs forces externes agissent sur un sous-système, comme dans le cas du sous-système C représenté ci-contre, il faut d'abord les additionner, de façon à avoir seulement trois forces à analyser: la résultante R_Q des forces externes, l'effort N_1 de la barre que l'on veut déterminer et l'effort R_n dans le nœud (ou la résultante des efforts dans les deux autres barres si le sous-système les coupe au lieu de couper le nœud).
La résultante R_Q des forces externes qui agissent sur le sous-système, dans la pratique les charges et les forces sur les appuis, peut être déterminée avec une des méthodes déjà connues: somme vectorielle des forces et construction de la ligne d'action qui passe par le point d'intersection des lignes d'action des charges, si les forces ne sont pas parallèles, ou détermination de la ligne d'action de la résultante au moyen d'un câble ou d'un arc auxiliaire, si les forces agissent toutes dans la même direction.
Il faut observer que l'arc funiculaire avec tirant, utilisé précédemment pour déterminer les barres les plus sollicitées, peut être considéré lui aussi comme une structure auxiliaire qui permet de trouver la ligne d'action de la résultante. Celle-ci peut en effet être déterminée en analysant le même sous-système qui comprend, cette fois, une partie d'arc funiculaire et de tirant. Il suffit de prolonger les barres coupées, jusqu'à trouver le point d'intersection au travers duquel devra passer la ligne d'action de la résultante.
A partir de ce procédé représenté ci-contre, il est évident que dans ce cas, l'effort R_n dans le nœud correspond exactement à la sollicitation de l'arc funiculaire quand la flèche, au droit du nœud, est identique à la hauteur du treillis. Ceci n'est valable que quand le nœud est situé sur la membrure supérieure.
Il faut d'autre part observer que l'effort R_n dans le nœud que nous venons de déterminer se réfère au même nœud que précédemment (cf. page précédente). Toutefois, les



Sous-système qui coupe un nœud et la barre d'une membrure



Sous-système avec plusieurs forces externes, détermination de leur résultante au moyen de l'arc avec tirant



Efforts dans les nœuds et sollicitation de l'arc funiculaire

effort ne correspondent pas, puisque les deux sous-systèmes coupent le nœud de façon différente: à droite de la force externe pour le sous-système B, à sa gauche pour le sous-système C. Cette différence est également évidente si on observe l'arc funiculaire: l'effort, et surtout son inclinaison varient, en passant de part et d'autre du point d'application de la force.

L'analyse des diagonales et leur fonctionnement

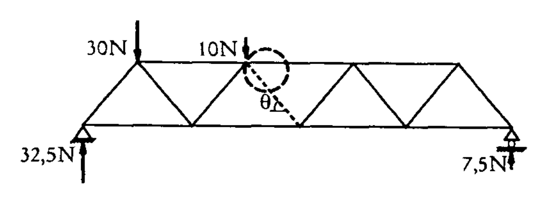
Comme nous l'avons déjà vu (cf. p. 127), le procédé qui nous a permis de trouver l'effort dans la membrure peut être complété par la détermination de l'effort dans la diagonale et de l'effort dans l'autre membrure impliquée dans le sous-système. Ceci s'effectue en décomposant l'effort R_n dans le nœud dans deux directions: celle de la membrure et celle de la diagonale.
Dans un treillis à membrures horizontales, la diagonale exerce donc la fonction de reprendre toute la composante verticale de l'effort dans le nœud. A partir de cette considération, il est évident que l'effort dans la diagonale dépend également de son inclinaison. La figure reproduite ci-contre montre comment une diagonale peu inclinée est plus fortement sollicitée.

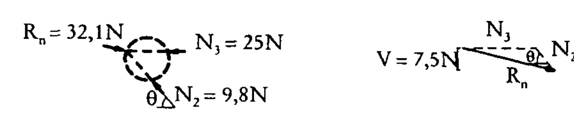
L'effort tranchant

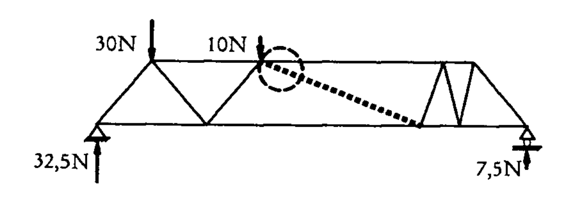
Si les charges sont verticales, la composante verticale de l'effort dans le nœud R_n est identique à la résultante des charges sur le sous-système R_Q (cf. le paragraphe précédent). Comme dans le cas du moment de flexion, cette composante verticale ne dépend donc que des charges et de la position des appuis. Dans la statique, on définit habituellement cette force comme effort tranchant (V). Une fois que l'on connaît cette valeur, on peut immédiatement trouver l'effort dans la diagonale en fonction de son inclinaison θ:

$$N_2 = V/\sin(\theta)$$

Si l'inclinaison θ est très faible, il résulte donc des sollicitations très importantes. C'est pourquoi on tend à disposer les diagonales en nombre suffisant de façon à garantir une pente assez grande et à limiter par conséquent leurs sollicitations.







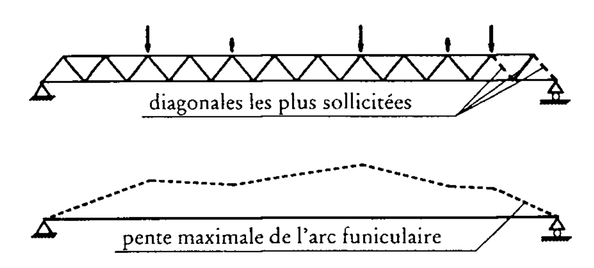
R_n N_3 = 12,5N N_2 = 20,2N

V = 7,5N N_3 N_2 R_n

Effort dans les diagonales et influence de leur inclinaison

La détermination des diagonales les plus sollicitées

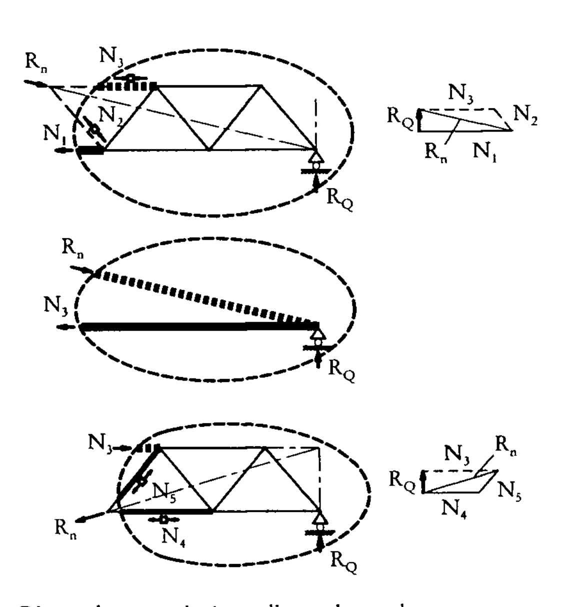
Comme venons de le voir, la composante verticale de l'effort R_n dans le nœud, la composante verticale de la sollicitation dans l'arc funiculaire et l'effort tranchant V sont en réalité une seule et même chose: ils se différencient seulement selon l'approche utilisée. A partir de cette considération, nous pouvons déduire que l'effort tranchant V est proportionnel à la pente de l'arc funiculaire. Pour une inclinaison donnée des diagonales, l'effort dans ces dernières sera donc plus grand là où l'arc funiculaire est plus fortement incliné.
Dans les treillis analysés jusqu'ici, reposant sur deux appuis à leurs extrémités et sollicités par des charges toutes orientées vers le bas, les diagonales avec les plus grands efforts se trouvent toujours au droit des appuis. C'est en effet dans ces zones que l'arc funiculaire présente la plus forte pente.
L'étude de la pente de l'arc funiculaire est très utile dans le cas de systèmes complexes ou en présence de charges orientées aussi bien vers le bas que vers le haut.



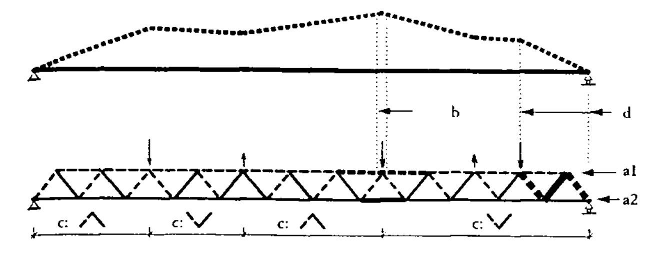
Détermination des diagonales les plus sollicitées au moyen de l'arc funiculaire

La détermination des diagonales en traction et en compression

Les figures ci-contre montrent les analyses de deux diagonales: la première est sollicitée à la compression, alors que la seconde en traction. Dans le premier cas, la sollicitation dans le nœud R_n de la membrure supérieure correspond à l'effort dans l'arc funiculaire, qui pousse le sous-système vers le bas. La diagonale qui s'y oppose sera donc sollicitée à la compression.
L'autre diagonale peut être analysée en considérant un nœud situé sur la membrure inférieure. Dans ce cas, l'effort R_n ne correspond plus à la sollicitation dans l'arc funiculaire (il faudrait introduire un buton et un câble, l'effort dans celui-ci correspondrait alors de nouveau à R_n). Sa composante verticale est quand même en équilibre avec la résultante R_Q des charges et agit encore vers le bas sur le sous-système. En décomposant cette résultante dans le sens de la membrure inférieure et dans celui de la diagonale, on obtient pour celle-ci un effort de traction.
En généralisant et en simplifiant ces résultats, nous pouvons affirmer que les diagonales inclinées dans le même sens que l'arc funiculaire sont sollicitées à la compression, alors que celles qui sont inclinées dans le sens inverse sont tendues. Il s'agit toutefois d'une simplification, valable uniquement si les membrures sont parallèles, mais qui est fort utile pour distinguer les diagonales tendues des diagonales comprimées simplement avec l'aide de l'arc funiculaire.

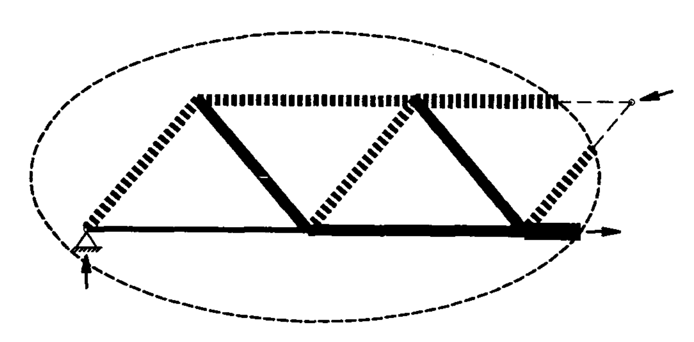


Diagonales comprimées et diagonales tendues

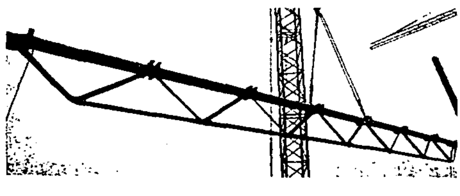


a1: arc supérieur: membrure supérieure comprimée
a2: tirant inférieur: membrure inférieure tendue
b: distance maximale entre arc et tirant => effort maximal dans les membrures

Analyse qualitative du treillis au moyen de l'analogie avec la structure funiculaire à poussée compensée



Diagonales en V (ou système Warren)





Centre Georges Pompidou à Paris, 1977, arch. R. Piano et R. Rogers, ing. P. Rice (Ove Arup & Partners), poutre triangulée avec diagonales en V durant le montage (ℓ = 44,8 m, h = 2,85 m, ℓ/h = 15,7) et vision des poutres triangulées en façade (les barres qui relient les poutres triangulées exercent une fonction de stabilisation de l'ensemble de la construction)

L'analyse qualitative d'un treillis

Nous pouvons considérer la structure funiculaire à poussée compensée qui est une structure facile à analyser, également d'un point de vue quantitatif car elle nous permet d'étudier qualitativement un treillis à membrures parallèles. A partir de la comparaison de ces deux structures, nous pouvons déduire quatre règles fort utiles:

a. là où, dans la structure funiculaire à poussée compensée, l'arc est au-dessus du tirant, nous avons dans le treillis une membrure supérieure comprimée et une membrure inférieure tendue;
b. là où la distance entre arc et tirant est maximale, nous avons dans le treillis les barres des membrures les plus sollicitées;
c. les diagonales du treillis inclinées dans le même sens que l'arc funiculaire sont comprimées, les autres sont tendues;
d. pour une inclinaison donnée, les diagonales les plus sollicitées du treillis se trouvent là où l'arc funiculaire est le plus incliné.

Les configurations possibles des diagonales

Les poutres réticulaires décrites jusqu'ici sont caractérisées par des diagonales disposées de façon à former une série de V. C'est pourquoi elles sont appelées *treillis avec diagonales en V* ou bien *treillis Warren*, du nom de l'ingénieur qui les fit breveter en 1848.

Diagonales en V

L'exemple ci-contre montre un treillis avec des diagonales en V dans lequel les barres sont construites en fonction du type de sollicitation: toutes les barres comprimées ont une section tubulaire, alors que les barres tendues sont pleines et ont ainsi un diamètre inférieur. Nous verrons par la suite, quand nous traiterons les problèmes de stabilité, que les sections métalliques sollicitées à la compression doivent effectivement avoir une forme bien définie, alors que les barres sollicitées à la traction peuvent avoir une section quelconque. En général, nous pouvons affirmer que pour les barres sollicitées à la compression les sections les plus efficaces sont des sections tubulaires ou en I, alors que pour les barres tendues on peut utiliser aussi des sections plates ou circulaires.

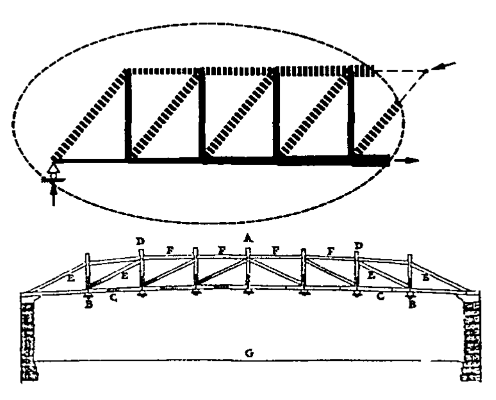
C'est pourquoi l'analyse qualitative des treillis que nous avons décrite est fort utile dans le projet des structures à treillis.

Diagonales en N

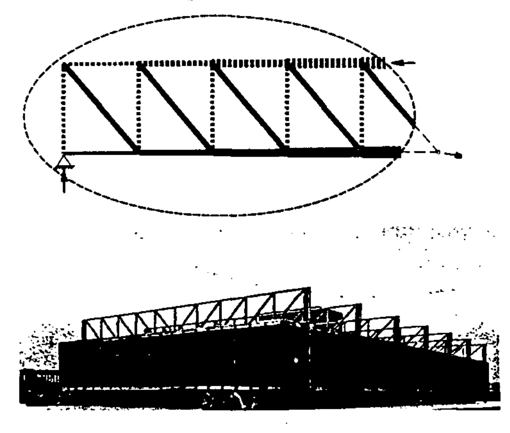
Une variante du treillis avec diagonales en V consiste à diminuer l'inclinaison des diagonales comprimées et à augmenter celle des diagonales tendues, jusqu'à atteindre la verticale (dans ce cas on les appellera *montants*). On obtient ainsi les treillis appelés *treillis à diagonales en N en compression*.
Pour ces treillis, on utilise aussi souvent la dénomination *système Howe* (W. Howe le fit breveter en 1840), bien qu'une structure de ce type ait déjà été proposée par Andrea Palladio, presque trois siècles plus tôt.
Avec les montants verticaux, la règle qui liait le type de sollicitation à l'inclinaison de la barre, comparée avec l'inclinaison de l'arc funiculaire, n'est plus valable. Si on isole un nœud qui relie le montant à une diagonale et à la membrure, on peut facilement démontrer que dans ce type de treillis les barres verticales sont généralement sollicitées à la traction. Si on augmente l'inclinaison des diagonales comprimées, jusqu'à les transformer en montants, on obtient un *treillis à diagonales en N en traction*, appelé aussi *système Pratt* (C. Pratt, brevet de 1844).

Diagonales en X

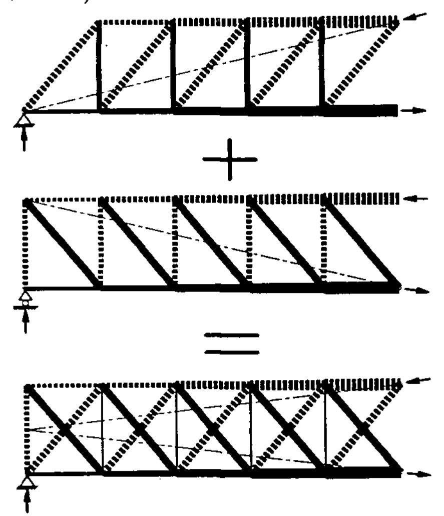
On obtient encore une autre configuration de diagonales en superposant un treillis à diagonales en N en traction à un autre treillis à diagonales en N en compression. Il s'agit d'un treillis avec montants et diagonales en X, appelé aussi *système Long* (H. Long, brevets de 1830 et 1839). La nouvelle structure est clairement hyperstatique: pour chaque champ on a une diagonale de trop.



Diagonales en N en compression (ou système Howe), structure proposée par A. Palladio en 1570 (*I quattro libri dell'architettura*, troisième livre, chapitre VIII)

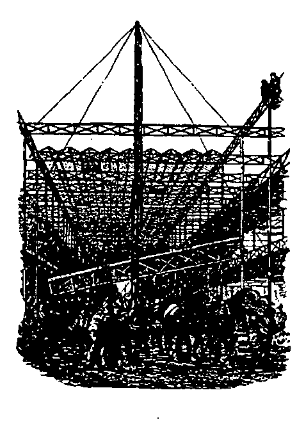


Diagonales en N en traction (ou système Pratt), projet de Mies van der Rohe pour le théâtre National de Mannheim, 1953 (ℓ = 80 m, h = 8 m, ℓ/h = 10)

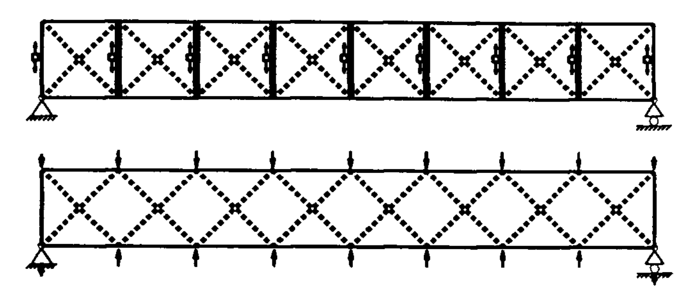


Diagonales en X avec montants, dérivant de la superposition de diagonales en N comprimées et de diagonales en N tendues

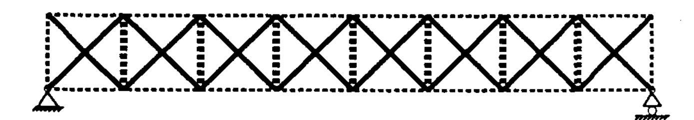




Poutres réticulaires du Crystal Palace à Londres, 1851, arch. J. Paxton, ing. Fox Henderson (ℓ = 7,32, 14,64 et 21,96 m, h = 0,915 m, ℓ/h = 8, 16 e 24)



Sollicitations dans un treillis hyperstatique à diagonales en X sous l'effet d'une prétension des montants, treillis isostatique sans montants avec des forces externes sur les nœuds, de façon à simuler l'effet de la prétension sur les montants



Treillis à diagonales en X et montants, dans lequel les diagonales sont prétendues



Biplan à moteur des frères Wright, premier vol le 17.12.1903

Sous l'effet d'une action externe, les deux systèmes originels entrent en action: une partie de la charge est reprise par le treillis à diagonales en N en traction, alors que la charge restante sollicite l'autre treillis à diagonales en N en compression. Les montants, qui exercent leur fonction pour les deux systèmes, sont sollicités à la compression dans le premier cas, et à la traction dans le second. Ces sollicitations se compensent, de sorte que l'effort dans les montants est habituellement très faible par rapport à l'effort dans les diagonales.

La forte hyperstaticité du système permet l'introduction d'efforts de prétension dans les barres. Il s'agit de sollicitations complètement indépendantes des charges externes qui sont produites en imposant un allongement à certaines barres avant leur fixation.

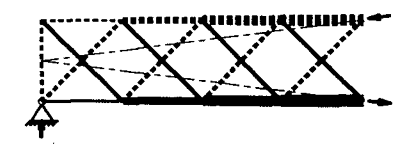
Nous pouvons imaginer un treillis à diagonales en X sans aucune charge extérieure, dans lequel les montants sont trop courts et sont allongés au moyen d'un effort de traction avant d'être reliés aux nœuds correspondants. Cet effort est repris par les diagonales, qui sont dans ce cas sollicitées à la compression, et par les membrures inférieures et supérieures, sollicitées à la traction. Ces sollicitations sont identiques à celles que l'on aurait dans un treillis isostatique sans montants, chargé par des forces verticales vers le bas sur les nœuds de la membrure supérieure, et vers le haut sur les nœuds de la membrure inférieure.

Si l'effort de prétension dans les montants est toujours supérieur à l'effort de compression qui résulte des charges externes (charges permanentes et charges variables), les montants sont toujours tendus et peuvent être constitués par des câbles métalliques.

Un treillis dans lequel les montants sont précontraints (raccourcis au moyen d'un effort de compression avant leur fixation aux nœuds, parce qu'initialement trop longs) présente une situation inverse avec les diagonales sollicitées à la traction et les membrures comprimées. Il faut remarquer que le même résultat peut être obtenu au moyen de la prétension des tirants.

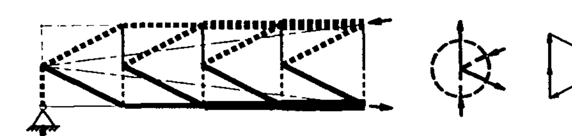
Ce principe a été souvent utilisé dans les premiers avions biplans, dans lesquels les deux ailes formaient les membrures et les diagonales prétendues étaient constituées de câbles en acier très minces. Les montants, toujours sollicités à la compression, étaient en revanche formés de barres en bois.

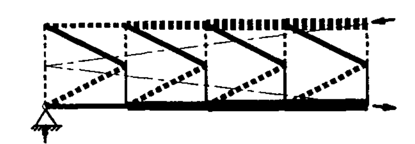
Puisque dans un treillis avec des barres résistant aussi bien à la traction qu'à la compression, les montants peuvent être considérés comme surabondants, on peut imaginer un treillis avec des diagonales en X sans barres verticales. Une structure de ce type peut aussi être obtenue en superposant deux treillis avec diagonales en V décalées.
Si on prévoit des montants au droit des deux appuis, le système n'a qu'un seul degré d'hyperstaticité.

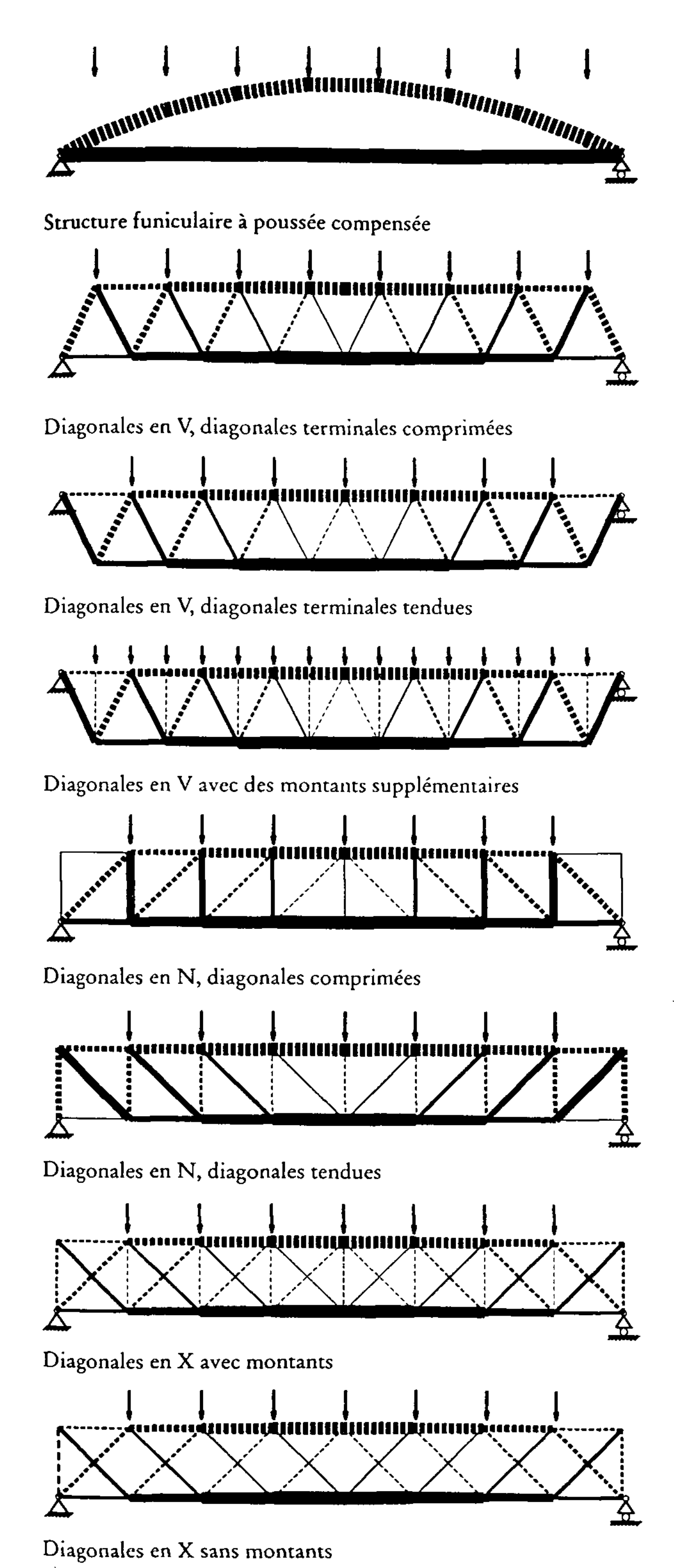

Treillis à diagonales en X sans montants

Diagonales en K

Une autre configuration des diagonales et des montants est reproduite ci-contre: il s'agit des *treillis à diagonales en K*. Les diagonales sont reliées aux nœuds au centre des montants qui, ainsi divisés, sont sollicités à la compression dans la partie inférieure, et à la traction dans la partie supérieure. La diagonale supérieure, inclinée dans le même sens que l'arc funiculaire, est sollicitée à la compression, alors que la diagonale inférieure, d'inclinaison inverse, est sollicitée à la traction. Ceci est également facilement vérifiable si on isole un sous-système qui coupe les deux diagonales et les deux montants.
Ce système est isostatique. Il est en effet possible de commencer l'analyse avec le nœud au droit de l'appui, puis de traiter tous les autres nœuds au moyen d'autres sous-systèmes, sans jamais avoir plus de deux inconnues à la fois.
Il est possible d'inverser les deux diagonales du système précédent, de façon à obtenir une traction dans la diagonale supérieure et une compression dans la diagonale inférieure. Cette configuration est fort semblable à la précédente, mais elle est toutefois moins efficace du fait qu'elle crée des sollicitations plus importantes dans les membrures.


Treillis à diagonales en K


Treillis à diagonales en K, dans le sens opposé à la structure funiculaire



Structure funiculaire à poussée compensée

Diagonales en V, diagonales terminales comprimées

Diagonales en V, diagonales terminales tendues

Diagonales en V avec des montants supplémentaires

Diagonales en N, diagonales comprimées

Diagonales en N, diagonales tendues

Diagonales en X avec montants

Diagonales en X sans montants

Les figures ci-contre résument les configurations les plus communes en les comparant à la structure funiculaire à poussée compensée (arc avec tirant). Les charges ont toujours la même intensité et les sollicitations sont toujours représentées de la même façon (avec une épaisseur proportionnelle à la sollicitation).

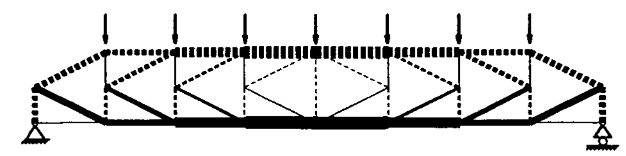
Comme le montrent les figures ci-contre, dans les treillis avec diagonales en V, les premières diagonales sont sollicitées à la compression ou à la traction selon que les appuis sont disposés au niveau de la membrure inférieure ou supérieure.

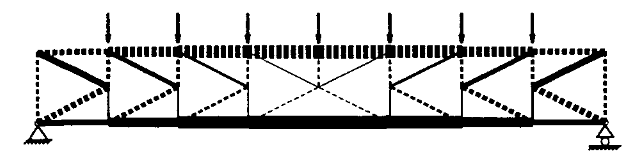
L'insertion de montants supplémentaires dans un treillis avec diagonales en V est habituellement rendue nécessaire si la charge agit directement sur la membrure supérieure, ou bien si celle-ci doit être stabilisée. Si de fortes charges agissent sur la membrure inférieure, il faut disposer des montants qui la suspendent aux nœuds de la membrure supérieure.

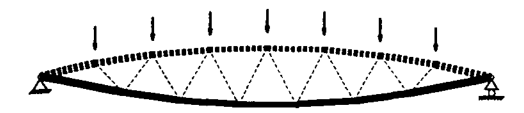
Comme nous l'avons vu, les treillis avec diagonales en X et montants sont hautement hyperstatiques (l'exemple illustré ci-dessous possède un degré d'hyperstaticité égal à huit). On peut observer que les diagonales sont peu sollicitées par rapport aux cas précédents.

Les treillis avec diagonales en X sans montants sont également hyperstatiques, mais ils n'ont qu'une seule barre surabondante.

Les treillis à diagonales en K sont plus efficaces si les deux diagonales (supérieure et inférieure) convergent du même côté que la structure funiculaire à poussée compensée composée.


Diagonales en K, ouverture semblable à la structure funiculaire à poussée compensée

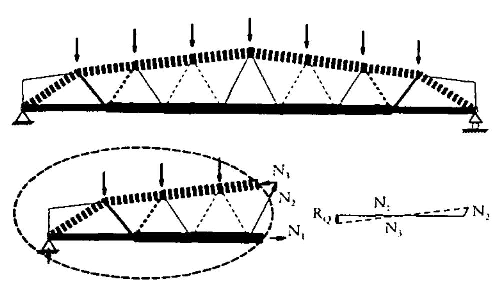

Diagonales en K, ouverture inversée par rapport à la structure funiculaire à poussée compensée



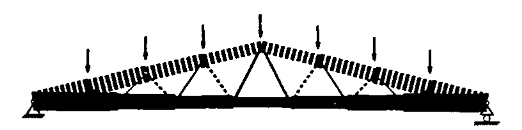
Treillis lenticulaire correspondant à la structure funiculaire dans le cas de charges réparties



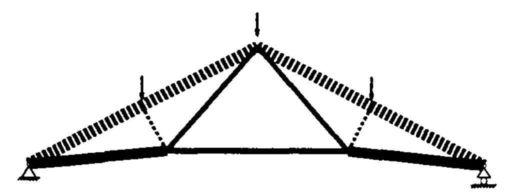
Pont sur l'Isar près de Grosshesselohe, 1857, ing. F. A. von Pauli, H. Gerber et L. Werder



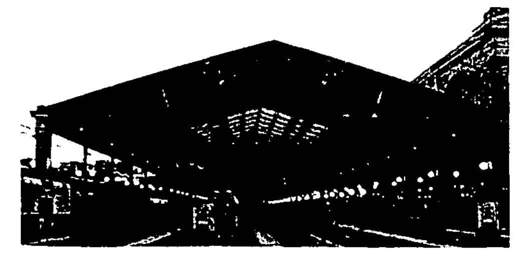
Treillis trapézoïdal, sollicitations sous charges uniformément réparties



Treillis triangulaire, sollicitations sous charges uniformément réparties



Treillis système Polonceau



Toiture de la Gare du Nord à Paris, 1865, arch. J.-I. Hittorff, système de ferme inventé par C. Polonceau vers 1840

Les formes des treillis

Nous avons jusqu'ici considéré deux cas particuliers: les treillis à hauteur constante avec membrures parallèles et les structures funiculaires composées d'arcs, câbles, tirants et butons, dans lesquelles le développement de la hauteur correspond à la répartition du polygone funiculaire des charges. Comme nous l'avons vu, dans les structures funiculaires, les diagonales, si elles sont présentes, ne sont pas sollicitées ou transmettent uniquement la force de déviation de l'effort dans les membrures au point d'application de la charge, comme on l'observe dans l'exemple ci-contre. Si l'on l'applique une charge variable, on obtiendra évidemment une modification du polygone funiculaire, de sorte que les diagonales seront aussi activées.

La forme des treillis répond souvent à d'autres exigences. Le treillis trapézoïdal ci-contre suit par exemple la forme de la toiture. Dans ce type de treillis, si les charges sont uniformément réparties, la partie centrale est habituellement caractérisée par des sollicitations dans les diagonales inverses par rapport aux sollicitations dans un treillis à hauteur constante. Ceci est dû au fait que dans cette zone l'effort tranchant dû aux charges est inférieur à la composante verticale de la sollicitation dans la membrure supérieure. Les sollicitations maximales dans les membrures sont atteintes d'autre part non pas à mi-portée, où le treillis atteint sa plus grande hauteur, mais dans les zones intermédiaires, là où le rapport entre la hauteur du polygone funiculaire et la hauteur du treillis est maximal.

Un cas limite est représenté par les treillis triangulaires dans lesquels toutes les diagonales sont sollicitées de façon inverse par rapport aux treillis à hauteur constante. D'autre part, la sollicitation maximale dans les membrures est atteinte à proximité des appuis.

La structure représentée ci-contre, appelée système Polonceau, est un cas particulier de treillis triangulaire. Elle peut être considérée comme la composition de deux treillis inclinés disposés en arc et reliés par un tirant, de façon à compenser la poussée. Dans ce cas aussi, les barres les plus sollicitées sont celles à proximité des appuis.

Le système Polonceau a été beaucoup utilisé pour soutenir les toitures des gares de chemin de fer dans la deuxième moitié du XIXe siècle. Grâce au fait que les éléments intérieurs sont surtout tendus et peuvent être formés de câbles, ces structures sont caractérisées par une grande transparence.

La forme et l'efficacité structurale

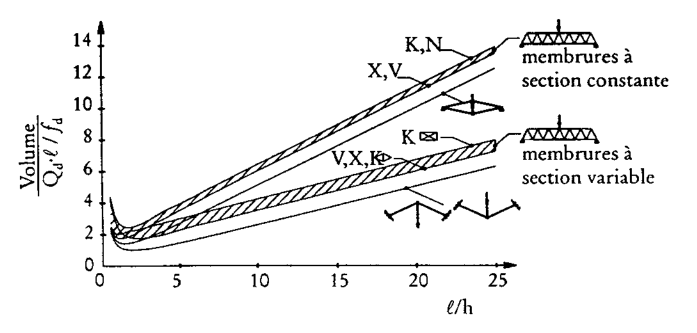
La forme du treillis, considérée comme forme des membrures et configuration des diagonales, et surtout l'élancement de la structure (rapport entre portée ℓ et hauteur h), ont une influence déterminante sur les sollicitations des barres, et donc aussi sur la quantité de matériau nécessaire pour résister aux efforts.

Le diagramme ci-contre, fort semblable au diagramme proposé précédemment pour les câbles (cf. p. 46), montre la quantité de matériau nécessaire pour résister aux efforts en fonction de l'élancement ℓ/h. Toutes les structures étudiées jusqu'ici y sont représentées: arcs et câbles, structures funiculaires à poussée compensée et treillis à hauteur constante à diagonales en N, V, X, et K. On ne considère ici que les structures chargées par une force concentrée à mi-portée et reposant sur deux appuis aux extrémités. Pour faciliter la comparaison entre les diverses structures, la charge est toujours appliquée à la même hauteur que les appuis (les arcs et les câbles sont ainsi complétés par des barres supplémentaires verticales). D'autre part, la stabilité n'est pas prise en compte, de sorte que la section nécessaire résulte de l'équation $A_{néc} = N_d/f_d$. Comme nous le verrons par la suite, les barres comprimées qui dépassent un certain élancement critique nécessitent, pour éviter l'instabilité, une section plus importante que celle indiquée par cette équation de dimensionnement. En outre, il a été supposé que le matériau considéré a la même résistance en traction et en compression.

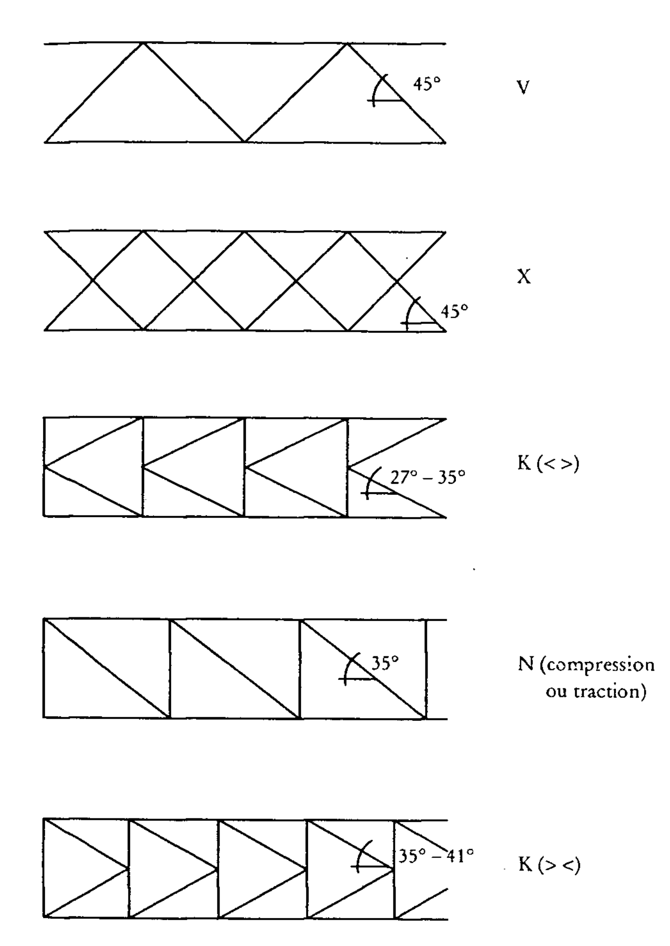
Une importante variation des efforts dans les membrures se produit dans les treillis à hauteur constante, de sorte que la structure optimale présente des sections variables. Souvent, pour des raisons d'exécution et des raisons esthétiques, on évite cette variation et la membrure, dimensionnée selon l'effort maximal, est donc surdimensionnée sur une partie importante de la longueur. Le diagramme montre les courbes qui se réfèrent d'une part aux treillis surdimensionnés à section constante des membrures et d'autre part aux treillis à section variable des membrures de façon à réduire au minimum la quantité de matériau nécessaire.

A partir de ce diagramme, il est possible de déduire les considérations suivantes:

- Pour toutes les structures, au-delà d'une certaine limite (ℓ/h environ 3), l'augmentation de l'élancement implique une augmentation importante de la quantité de matériau nécessaire (poids propre de la structure).
- Les câbles et les arcs exigent la même quantité de matériau. Ceci est évident si on considère les analogies entre ces deux formes de structures.



Quantité de matériau en fonction de l'élancement ℓ/h
(à parité de portée ℓ, de charge Q_d et de résistance du matériau f_d)



Inclinaisons des diagonales pour lesquelles le volume de matériau nécessaire est minimal (treillis à hauteur constante)

- En réalité, si nous considérions le problème de la stabilité des barres comprimées, l'arc exigerait un volume de matériau bien plus important.
- L'arc avec câble, qui peut être considéré comme un treillis dont la forme respecte celle du polygone funiculaire, exige une quantité presque double de matériau par rapport à l'arc ou au câble. Ceci est dû au fait que dans l'arc, ou dans le câble, la poussée horizontale est reprise par les appuis, alors que dans la structure funiculaire à poussée compensée la poussée est reprise par un élément de la structure qui exige lui aussi du matériau.
- Pour des rapports d'élancement supérieurs à environ cinq, les treillis à hauteur constante dans lesquels la section des membrures suit la répartition des sollicitations, sont beaucoup plus efficaces que les structures funiculaires à poussée compensée.
- Les treillis à hauteur constante et section des membrures constante (barres surdimensionnées) sont les moins efficaces. Ils exigent en effet encore plus de matériau que les structures funiculaires à poussée compensée: pour les seules membrures, il faut une quantité de matériau comparable à celle de l'arc et du câble (sollicitation et longueur comparables), quantité à laquelle il faut cependant ajouter le matériau pour les diagonales.
- La configuration des diagonales exerce aussi une influence sur le volume de matériau, mais moins importante que celle des autres facteurs. Pour les treillis à membrures à section variable, les diagonales les plus efficaces sont celles en X, V et K (<>), alors que celles en N et K (><) exigent plus de matériau. Pour les treillis à membrures surdimensionnées à section constante, la situation est analogue: X et V sont les plus efficaces, N et K (aussi bien <> que ><) les moins efficaces.

L'inclinaison des diagonales a elle aussi une influence sur le volume de matériau. Dans le diagramme, seule l'inclinaison qui réduit au minimum le matériau nécessaire est montrée (cf. les inclinaisons optimales représentées ci-contre).

L'influence de la forme sur la rigidité de la structure

Nous avons souvent mis en évidence le fait qu'une structure ne doit pas seulement résister aux charges sans se rompre (critère de l'état limite ultime pour le dimensionnement), mais doit aussi se déformer sans dépasser certaines limites (critère de l'état limite de service). L'efficacité d'une structure dépend donc aussi de sa rigidité.

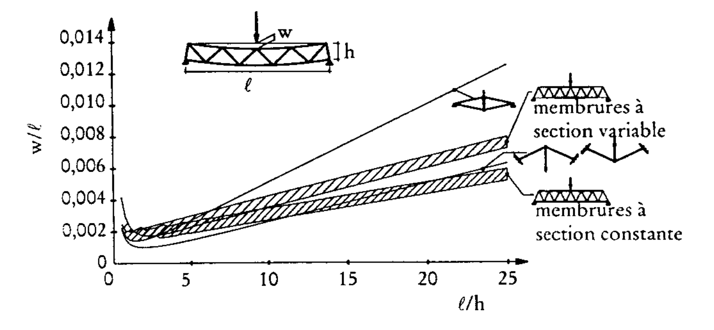
Le diagramme ci-contre montre les déplacements maximaux des structures analysées précédemment, exprimés de nouveau en fonction de l'élancement. On a considéré ici une charge qui provoque une déformation unitaire égale à 0,001 dans les barres les plus sollicitées (par exemple contraintes $\sigma = 210$ N/mm^2 et module d'élasticité de l'acier E = 210000 N/mm^2). Grâce au principe de proportionnalité, valable pour les structures à comportement linéaire, le même diagramme peut être utilisé pour d'autres sollicitations et d'autres matériaux, avec des modules d'élasticité différents.

Dans ce cas aussi, l'augmentation de l'élancement provoque généralement une forte croissance des déformations.

Les structures les plus rigides sont les treillis à hauteur constante avec des membrures à section constante. Ceci provient du fait que ces structures sont surdimensionnées, de sorte que de nombreuses barres ne sont pas exploitées complètement et que leur déformation unitaire n'atteint la valeur prévue que dans les zones les plus sollicitées.

Les structures sans matériau superflu avec les déplacements les plus faibles sont les arcs et les câbles (il faut noter que les valeurs reportées dans le diagramme de p. 47 ne sont plus grandes que parce que l'on a fait l'hypothèse d'une sollicitation plus grande et d'un module d'élasticité plus faible). Viennent ensuite les treillis à hauteur constante et membrures à section variable qui subissent des déplacements légèrement supérieurs. En ce qui concerne l'influence de la configuration des diagonales et de leur inclinaison, ce que nous avons observé à propos de la quantité de matériau reste valable.

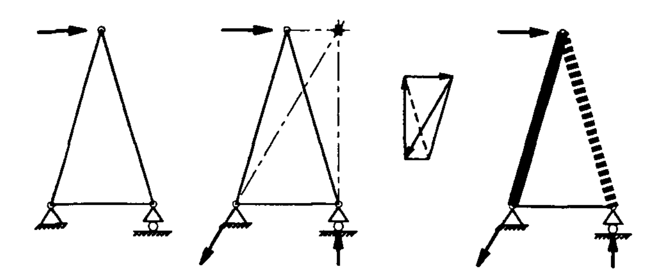
Des déplacements bien plus importants apparaissent en revanche dans les structures funiculaires à poussée compensée.



Déplacement à mi-portée causé par une charge concentrée en fonction de l'élancement ℓ/h (déformation unitaire ε = 0,001)

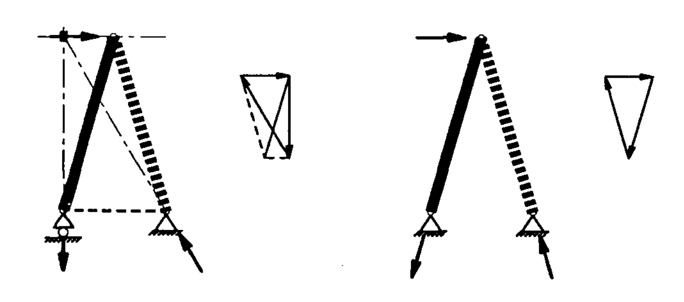
Les treillis avec charges horizontales

Les treillis analysés jusqu'ici reposent sur deux appuis placés aux extrémités et sont sollicités par des charges verticales ou inclinées. Considérons maintenant des cas où les charges sont horizontales.



Treillis avec une charge horizontale

Dans l'exemple ci-contre, une charge isolée peut être reprise par une simple structure triangulaire, composée de seulement trois barres et trois nœuds. La condition $n_{réactions} + n_{barres} = 3 + 3 = 2 \cdot n_{nœuds} = 2 \cdot 3$ indique que la structure est isostatique. Les forces transmises aux appuis peuvent être calculées de façon aisée, si on considère que les lignes d'action des trois forces impliquées (une charge et deux forces sur les appuis) doivent converger en un seul point et que deux d'entre elles (la ligne d'action de la charge et celle de la force transmise par l'appui mobile) sont connues. Les sollicitations dans les trois barres peuvent elles aussi être calculées facilement en analysant des sous-systèmes qui incluent un seul nœud à la fois. Si nous observons comment l'arc se présentait originairement, nous remarquons des sollicitations différentes de celles rencontrées jusqu'ici: alors qu'une barre est encore sollicitée à la compression, l'autre est maintenant sollicitée à la traction.



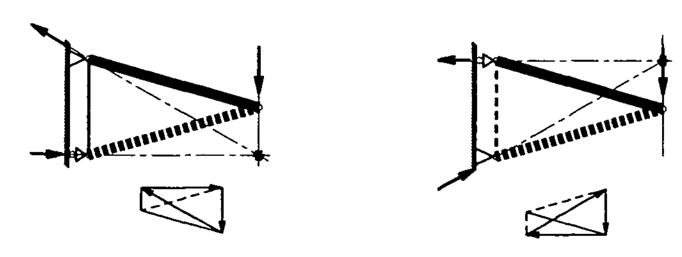
Influence des appuis sur la sollicitation du « tirant »

Le « tirant » est encore sollicité à la traction s'il doit reporter la charge à l'appui fixe, comme cela se produit dans le cas analysé. Il doit en revanche reprendre un effort de compression si la charge agit de droite à gauche, ou bien si les appuis sont inversés, comme on le voit dans l'exemple ci-contre. Comme dans les structures qui supportent des charges verticales, le « tirant » devient superflu si l'appui mobile est remplacé par un appui fixe.

Les systèmes décrits peuvent représenter la structure d'un bâtiment haut (tour) sollicité par des charges horizontales causées par le vent ou par les actions sismiques.

L'analogie entre tours et consoles

Nous pouvons imaginer la même structure tournée de 90°, fixée à une paroi et chargée par une force verticale de gravitation. Nous avons alors une barre supérieure qui, à la différence de presque tous les exemples traités jusqu'à maintenant, est sollicitée à la traction, et une barre inférieure comprimée.

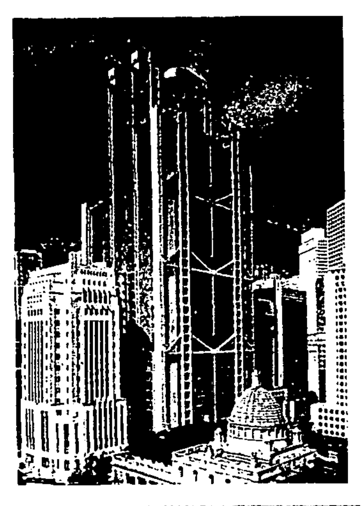


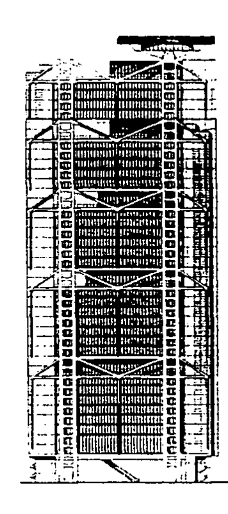
Consoles sollicitées par des charges verticales

Les appuis aussi fonctionnent de façon différente: l'appui supérieur transmet un effort de traction et tire sur la paroi, alors que l'appui inférieur, comme presque tous les appuis examinés jusqu'à maintenant, transmet un effort de compression et pousse la paroi. La composante verticale de la charge est transmise uniquement par l'appui fixe, quelle que soit sa position. Si on a deux appuis fixes sans élément de

liaison, la force verticale transmise aux appuis par chacune des barres dépend de son inclinaison.

Dans l'immeuble ci-contre, nous sommes en présence de ce qui vient d'être décrit. Un tirant incliné et un buton horizontal forment des consoles en porte-à-faux qui soutiennent, au moyen de tirants verticaux, le poids des étages inférieurs.







Siège central de la Hong Kong and Shanghai Banking Corporation à Hong Kong, 1986, arch. N. Foster, ing. bureau Ove Arup

Les consoles et les tours avec plusieurs charges

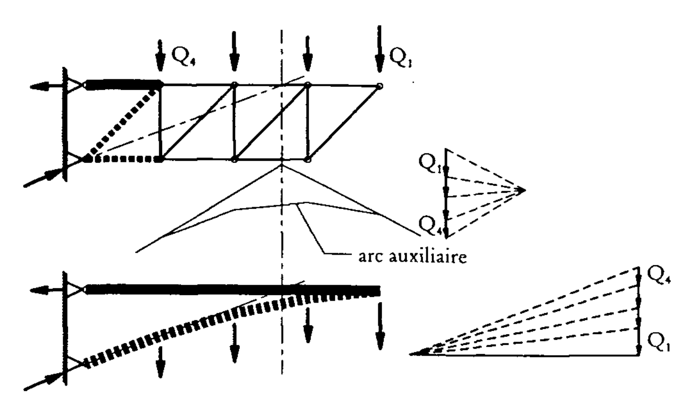
Le treillis représenté ci-contre, considéré comme une console avec charges verticales ou bien comme une tour avec charges horizontales, peut être analysé selon le même procédé utilisé déjà plusieurs fois:

- détermination de la résultante des charges au moyen d'une structure auxiliaire (arc ou câble);
- étude d'une structure funiculaire à poussée compensée (composée d'un arc et un tirant, un câble et un buton, ou bien encore un arc et un câble);
- détermination du type de sollicitation (traction ou compression) et des barres les plus sollicitées au moyen de l'analogie entre treillis et structure funiculaire à poussée compensée;
- détermination des intensités dans les barres au moyen de sous-systèmes appropriés.

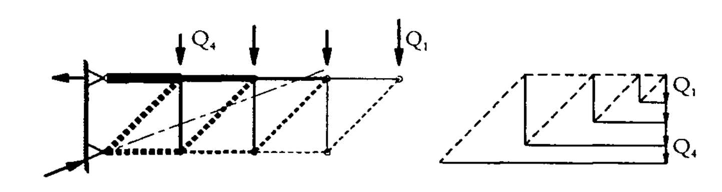
Dans les consoles sollicitées par des forces de gravitation, le tirant est au-dessus de l'arc, de sorte que la membrure supérieure est sollicitée à la traction, alors que la membrure inférieure est comprimée. L'arc atteint sa plus grande hauteur (distance au tirant) au droit de l'encastrement dans la paroi (ou dans le sol pour la tour), de sorte que les barres correspondantes du treillis à membrures parallèles sont les barres les plus sollicitées.

A partir de la pente de l'arc funiculaire, on peut déduire que les diagonales seront toutes comprimées et que celle à proximité de l'encastrement est la plus sollicitée.

La possibilité d'analyser un nœud après l'autre reste clairement ouverte, permettant ainsi de déterminer les sollicitations de toutes les barres (cf. la construction reproduite ci-contre).

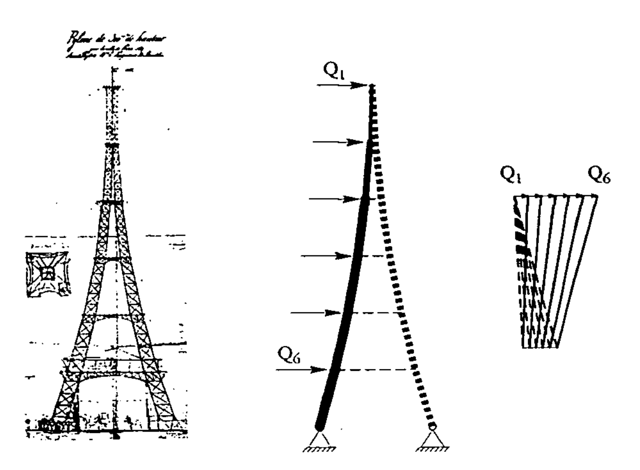


Analyse d'un treillis à console (ou d'une tour) au moyen d'une structure funiculaire à poussée compensée

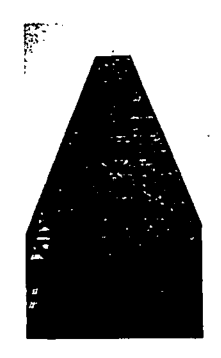


Analyse complète du treillis avec un sous-système pour chaque nœud

Pour les consoles et les tours également, les structures funiculaires à poussée compensée peuvent être considérées comme des treillis sans diagonales, ou bien comme des treillis dans lesquels les diagonales ne sont pas sollicitées.
Ce principe a été adopté dans la conception de la forme de la *Tour Eiffel*. Le but était précisément celui d'éliminer les diagonales, de façon à obtenir une structure la plus transparente possible. L'ingénieur M. Koechlin, qui fut le premier à proposer la tour (brevet de 1884) avant d'en diriger par la suite le projet structural en qualité d'ingénieur en chef des ateliers Eiffel, détermina en effet la forme sur la base de ces considérations.
Si la forme d'une tour ou d'un gratte-ciel ne correspond pas à celle du polygone funiculaire des charges, les diagonales deviennent alors indispensables et on obtient ainsi un treillis. Cette structure est la plus utilisée pour les bâtiments qui dépassent une certaine hauteur. Le treillis peut être disposé en façade, comme dans les exemples ci-contre, ou bien constituer la structure du noyau central, comme dans le gratte-ciel illustré en bas de la page.



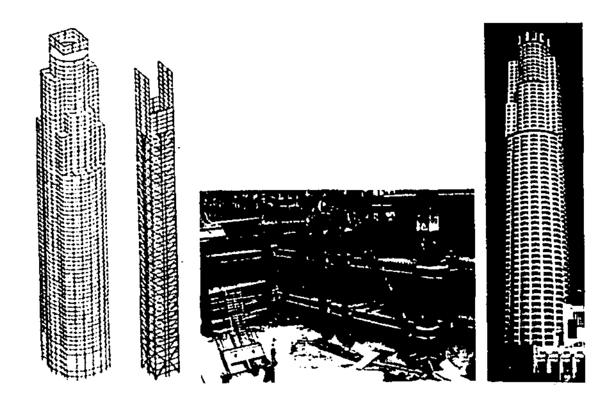
Pylône de 300 m de hauteur pour la ville de Paris, 1884, ing. M. Koechlin (projet réélaboré par la suite avec l'aide de l'arch. Sauvestre et construit sous la direction de G. Eiffel)



John Hancock Center à Chicago, 1969, arch. Skidmore, Owings & Merrill, ing. F. Khan (hauteur de la tour 344 m), diagonales en X avec montants

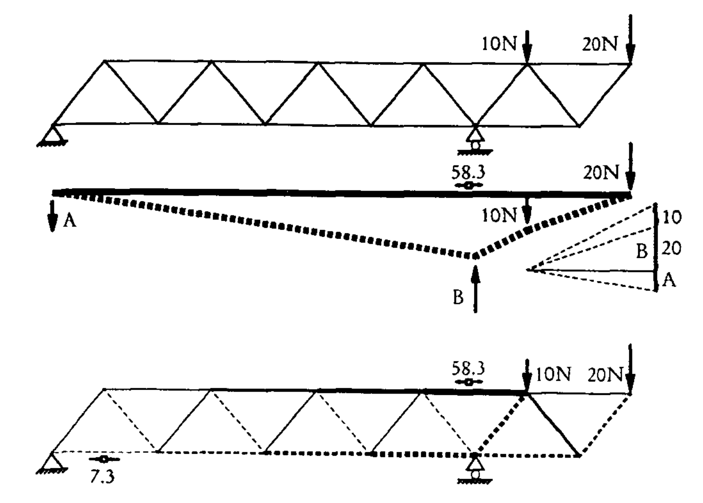


Bank of China à Hong Kong, 1989, arch. I. M. Pei & Partners, ing. Robertson, Fowler & Ass. (hauteur 369 m), diagonales en X sans montants et en V



First Interstate World Center, Los Angeles, 1989, arch. Pei, Cobb, Freed & Partners, ing. P. V. Banavalkar (hauteur 310 m), noyau à diagonales en V et en K

Les poutres réticulaires avec consoles



Poutre triangulée avec console: inversion des sollicitations dans les membrures de la poutre sous l'effet des charges sur la console

Une console peut également être fixée à une poutre triangulée, et constituer ainsi son prolongement au-delà de l'appui. La structure funiculaire correspondante peut alors être formée d'un arc qui, partant de l'extrémité de la console, descend vers l'appui le plus proche, puis est dévié par la force qui agit sur l'appui avant de remonter enfin vers l'autre appui. Au droit de ce dernier, la composante horizontale de la poussée est reprise par le tirant et reportée à l'autre extrémité de l'arc.

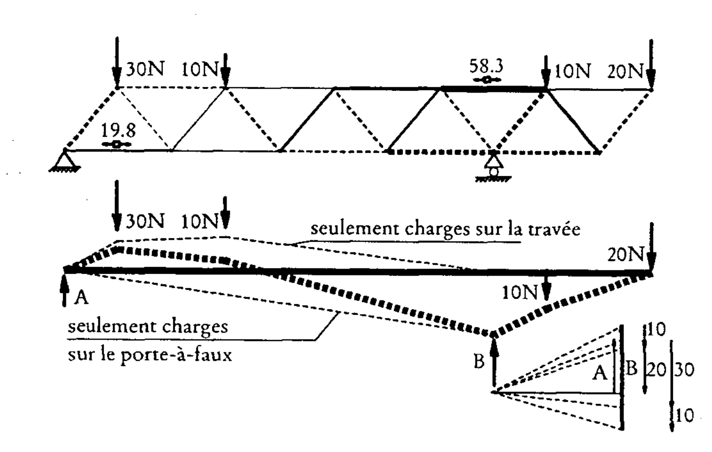
L'appui opposé à la console doit reprendre une force qui maintient la structure à terre et en empêche le renversement. Dans ce cas aussi, les sollicitations du treillis peuvent être étudiées, au moins qualitativement, au moyen d'une structure funiculaire à poussée compensée. Puisque le tirant se trouve toujours au-dessus de l'arc, la membrure supérieure du treillis est partout sollicitée à la traction, alors que la membrure inférieure est comprimée sur toute sa longueur. Il faut observer que cette situation est complètement inversée par rapport à celle de la poutre chargée en travée (entre ses appuis).

Les barres des membrures les plus sollicitées se trouvent dans la zone des appuis, c'est-à-dire là où la distance entre l'arc et le tirant est la plus importante. Le signe des efforts dans les diagonales, traction ou compression, peut facilement être déterminé par l'observation de la pente de l'arc.

Si on ajoute des charges en travée, la situation avec la membrure inférieure tendue et la membrure supérieure comprimée sera partiellement rétablie. Dans l'exemple ci-contre, la zone entre les appuis avec ses charges correspond au treillis déjà analysé précédemment (cf. p. 125), alors que la console est identique à celle qui vient d'être considérée. Il est donc possible de déterminer les sollicitations en sommant simplement les sollicitations déjà trouvées pour les deux cas de charge.

Dans la partie à gauche l'effet des charges sur la travée prévaut: la membrure inférieure est tendue, alors que la membrure supérieure est comprimée. Les sollicitations sont toutefois réduites par l'action des charges sur la console. La console, mais aussi la partie droite de la travée sont en revanche influencées de façon prédominante par les charges agissant sur la console.

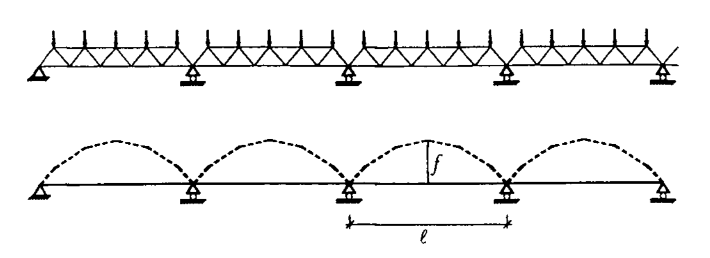
Ces considérations peuvent se déduire facilement de la structure funiculaire: à droite, l'arc est toujours en-dessous du tirant, alors qu'à gauche la situation est inversée.



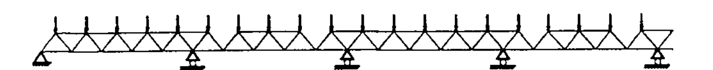
Poutre triangulée avec console: effet des charges sur la travée combinées avec les charges sur la console

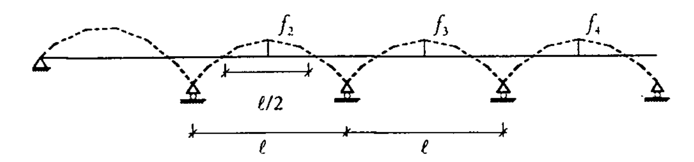
Les poutres Gerber

Les charges agissant sur la console, par le fait qu'elles réduisent les sollicitations en travée, exercent donc un effet positif sur cette dernière. Cet avantage peut également être exploité dans le cas de travées multiples.
Si nous disposons des poutres simples en treillis, l'une à côté de l'autre, les sollicitations seront clairement identiques à celles d'une poutre isolée.
Une disposition alternative consiste à prolonger par des consoles la première, la troisième et, selon un rythme alterné, les poutres suivantes, de façon à pouvoir poser les poutres restantes, plus courtes, directement sur les extrémités des consoles. Les poutres courtes sont non seulement moins sollicitées, mais elles transmettent aussi leur charge aux consoles des poutres longues, réduisant également leurs sollicitations en travée. Dans le schéma ci-contre, ce principe est mis en évidence par la structure funiculaire à poussée compensée correspondante. Si les travées et les longueurs des consoles sont régulières, la distance entre l'arc et le tirant dans la travée avec les consoles (f_3) est identique à celle des poutres courtes (f_2 et f_4), et est beaucoup plus petite que la distance entre l'arc et le tirant dans les poutres simples sans console (f). Il est d'autre part possible de choisir la longueur des consoles de façon que les distances f_2, f_3 et f_4 soient identiques à la distance entre le tirant et les arcs sur les appuis. De cette façon, les distances maximales entre l'arc et le tirant, mais aussi les sollicitations maximales dans les membrures des treillis, sont diminuées de moitié par rapport à celles des poutres simples.
Ce système est défini comme *poutre Gerber* du nom de l'ingénieur qui le fit breveter en 1866, et en projeta la première application en 1867 avec le pont sur le Main à Hassfurt. Ce pont est intéressant aussi pour sa forme qui correspond dans la partie centrale à celle de la structure funiculaire des charges permanentes avec un arc et un câble symétriques. Les diagonales (système en N et X avec montants) ont pour fonction de stabiliser la structure et de reprendre les charges variables. Dans les travées latérales, la forme ne suit pas parfaitement celle de la structure funiculaire des charges permanentes. Dans ce cas, l'arc et le câble devraient se croiser de nouveau, formant toutefois une structure instable et incapable de reprendre les charges variables (ce serait comme si nous coupions des barres dans les membrures de la première et de la troisième travée de l'exemple précédent, là où l'arc funiculaire croise le tirant).

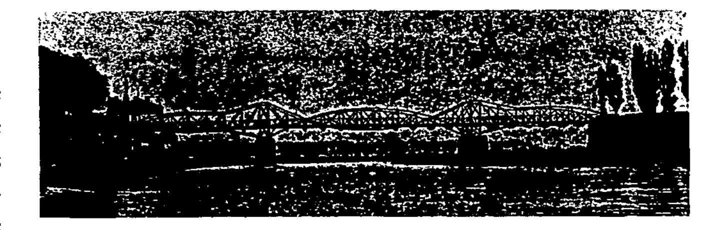


Série de poutres simples avec structure funiculaire à poussée compensée correspondante





Série de poutres simples et poutres avec consoles: poutres Gerber

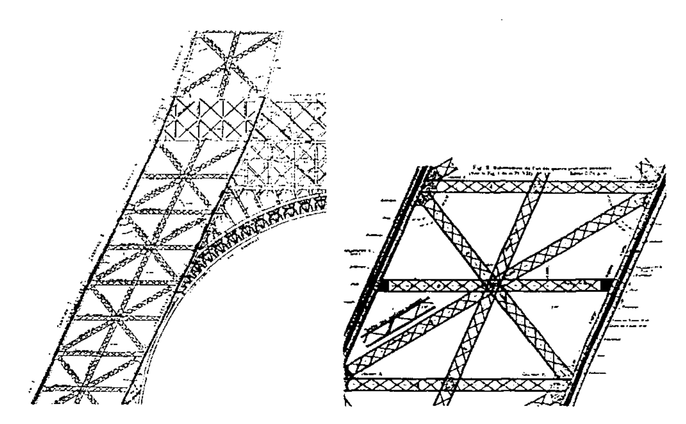


Pont sur le Main à Hassfurt, 1867, ing. H. Gerber
(ℓ = 26,5 m, 42,7 m, 26,5 m)

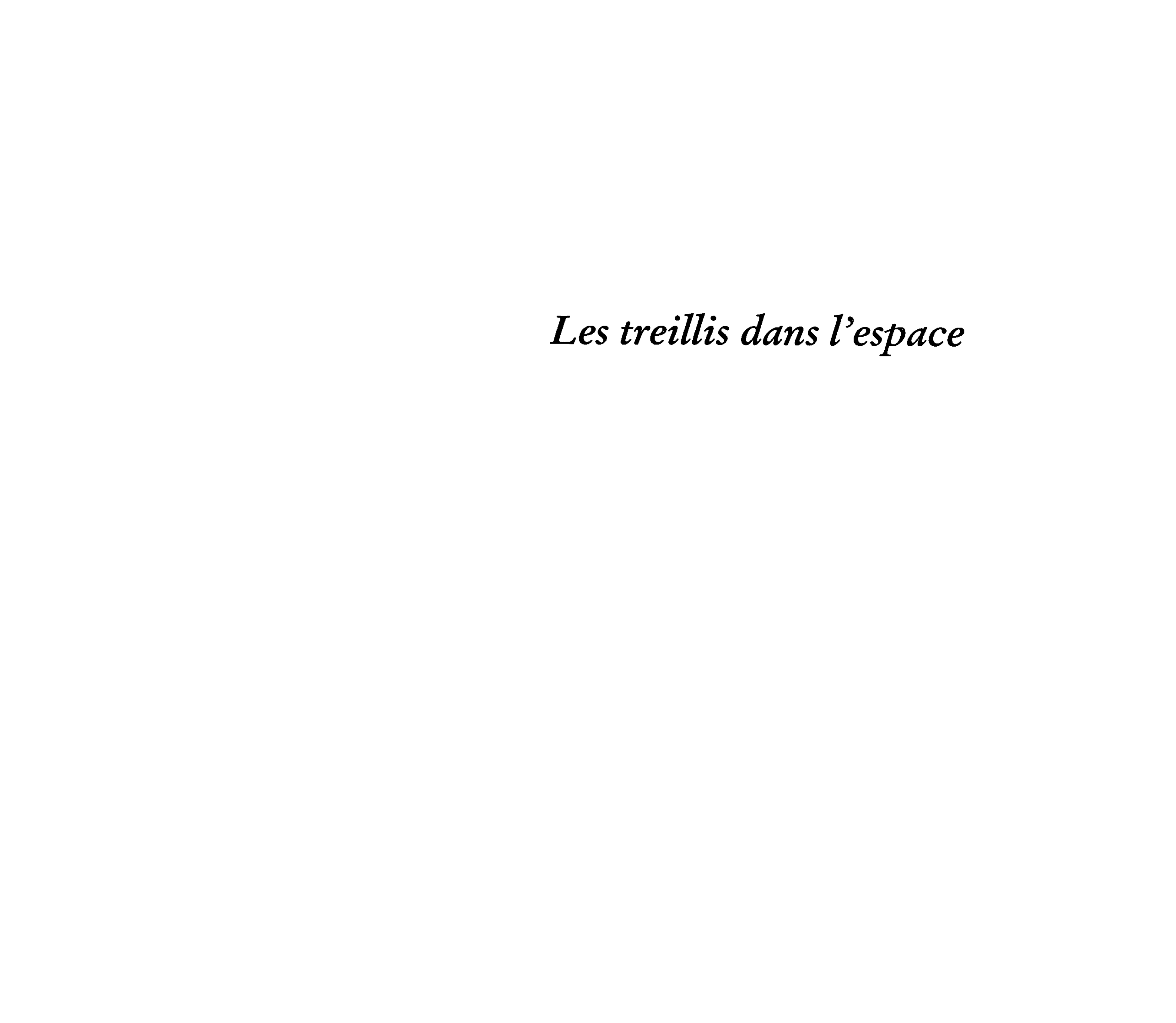
Treillis pour d'autres formes structurales

Du point de vue structural, les treillis étudiés jusqu'ici sont tous des poutres: poutres simples posées sur deux appuis aux extrémités, consoles, poutres avec consoles ou poutres Gerber.

Nous avons toutefois déjà vu d'autres formes structurales, qui, si on les observe attentivement, se révèlent être elles aussi des treillis. C'est par exemple le cas de la *poutre de câbles système Jawerth* (cf. p. 51), qui peut être considérée comme un treillis sollicité à la traction de façon à ne jamais recevoir de compression dans les membrures, mais aussi des « câbles » qui soutiennent les travées latérales du *Tower Bridge* à Londres (cf. p. 55), de l'arc, des piles et du tablier du pont construit par les Ateliers Eiffel à Porto (cf. p. 80), des arcs et des câbles du pont sur l'Elbe à Hambourg (cf. p. 114), mais encore de la *Tour Eiffel* (cf. p. 144 et la reproduction ci-contre) qui, bien qu'elle doive être considérée globalement comme une structure funiculaire à poussée compensée, est composée d'innombrables treillis si on l'analyse plus en détail. Les membrures sont en effet subdivisées en quatre barres reliées par des diagonales qui, à leur tour, sont composées par des treillis.



Tour Eiffel à Paris, 1889, ing. G. Eiffel, M. Koechlin et E. Nougier, arch. Sauvestre, treillis qui constituent les membrures et les diagonales

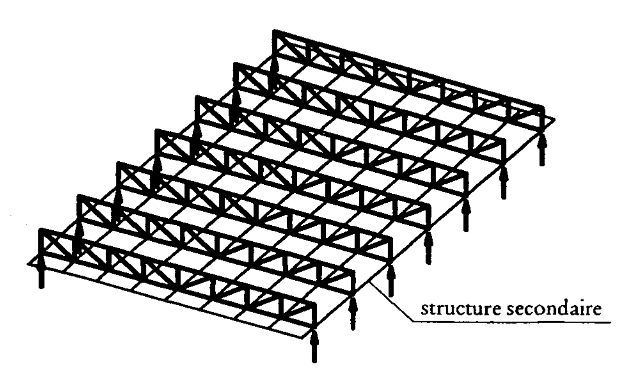


Les treillis dans l'espace

La composition de treillis pour soutenir une toiture

Revenons maintenant à l'emploi le plus fréquent des treillis en architecture: le soutien d'une toiture plane. La façon la plus simple pour atteindre ce but est de disposer une série de treillis parallèles sur la surface à couvrir. La charge permanente et la charge variable sur la toiture sont d'abord reprises par un système de panneaux ou de pannes, puis transmises par le système principal des treillis aux appuis disposés sur deux des côtés de la toiture.

Le système secondaire peut être suspendu à la membrure inférieure (cf. p. 132), posé sur la membrure supérieure (cf. p. 133), ou bien fixé de façon alternée à la membrure supérieure ou inférieure de façon à former ce que l'on appelle des *sheds*.



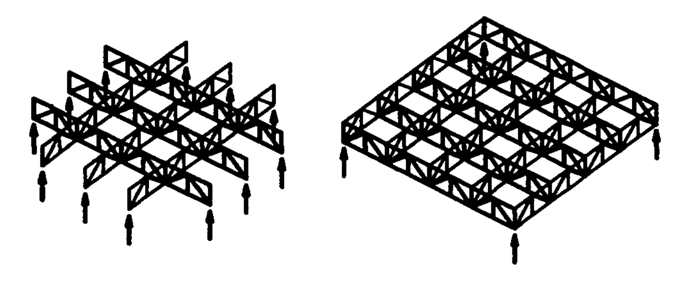
Série de treillis disposés sur des plans parallèles

La grille de treillis

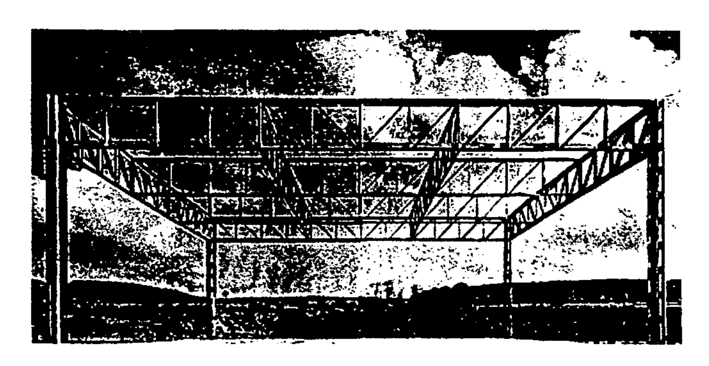
Une alternative au système de treillis parallèles consiste à disposer deux séries de treillis perpendiculaires entre eux, de façon à former une *grille*. La seconde série de treillis remplace les poutres du système secondaire décrites dans l'exemple précédent. Ces treillis, toutefois, ne transmettent pas la charge uniquement aux autres poutres à treillis, mais en transmettent une partie directement à leurs appuis. Dans ce cas, pour une toiture rectangulaire, les appuis sont distribués sur les quatre côtés.

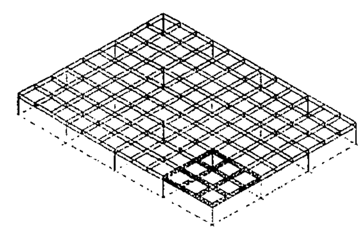
Dans ces structures, les charges ne doivent pas suivre nécessairement la même direction jusqu'aux appuis. Une charge peut en effet être transmise aussi dans le sens diagonal, de sorte que les appuis d'une toiture rectangulaire peuvent être disposés en les plaçant seulement dans les angles.

Dans l'exemple ci-contre, les treillis sont disposés sur une maille carrée, avec un entraxe de 4,80 m, et sont soutenus aux quatre coins d'un module carré de 14,40 m de côté. Ces modules peuvent être composés de façon à obtenir une grille de dimensions importantes soutenue tous les 14,40 m, aussi bien sur le périmètre qu'à l'intérieur.



Grille de treillis avec appuis sur les quatre côtés, ou bien appuis aux quatre coins





Usine USM à Münsingen, CH, 1963, arch. B. et F. Haller

Les treillis spatiaux

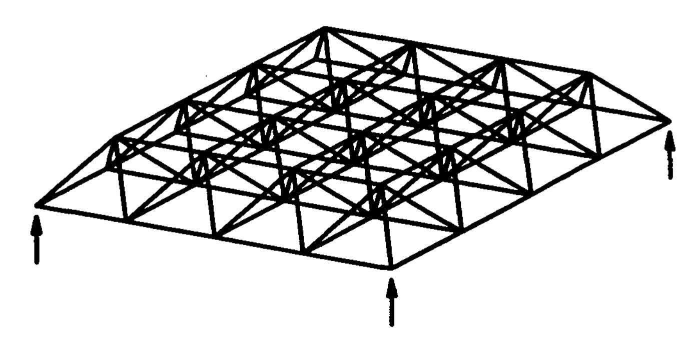
L'efficacité des grilles de treillis augmente sensiblement si les diagonales sont disposées de façon à relier les membrures supérieures et inférieures disposées dans les deux directions. De cette façon, on obtient une véritable structure spatiale, dans laquelle les barres forment non seulement des triangles, comme dans les treillis plans, mais des tétraèdres ou des pyramides.

La première construction de ce type fut proposée par le physicien Alexander Graham Bell, mieux connu pour ses contributions au développement du téléphone. En 1904, Bell fit breveter un système de tétraèdres préfabriqués en acier qui pouvaient être assemblés de façon à construire des treillis spatiaux de diverses formes.

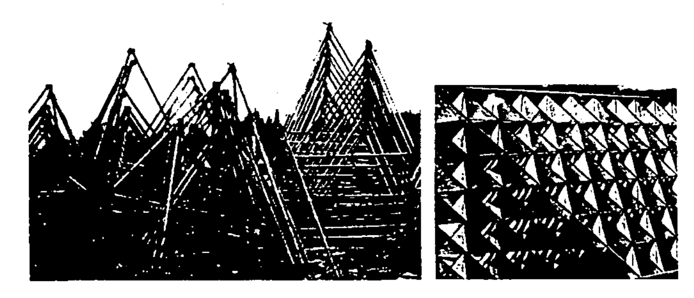
Dans la seconde moitié du XXe siècle, divers systèmes ont été développés qui permettent de monter des treillis spatiaux avec des nœuds standard et des barres produites industriellement.

Le plus connu est le système Mero, conçu à la fin des années 1950 par Max Mengeringhausen. Jusqu'à dix-huit barres tubulaires peuvent être vissées au nœud représenté ci-contre, permettant ainsi une grande liberté dans la construction de treillis spatiaux.

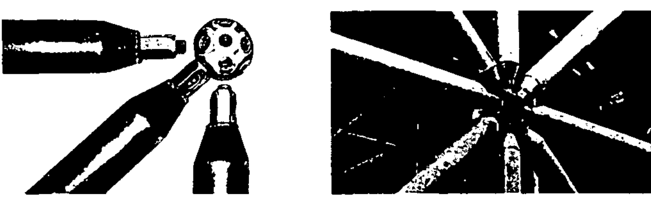
Les images ci-dessous montrent un treillis spatial de grandes dimensions. Il s'agit du projet d'un hangar pour avions que l'aviation militaire des Etats-Unis avait commandé en 1951 à Konrad Wachsmann. Le but était de construire en peu de temps et dans n'importe quelle situation une très grande structure avec des porte-à-faux jusqu'à cinquante mètres, constituée d'éléments standardisés qui, pour être facilement transportés, ne devaient pas peser plus de cinq tonnes et ne devaient pas dépasser les dimensions 1 × 3 × 1 m.



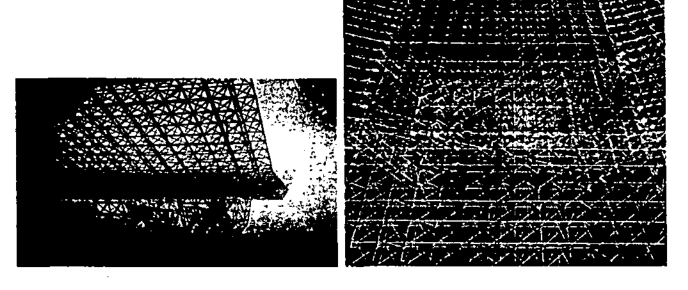
Treillis spatial



Tétraèdres préfabriqués pour la construction de treillis spatiaux, brevet de A.G. Bell de 1904, emploi pour des machines volantes



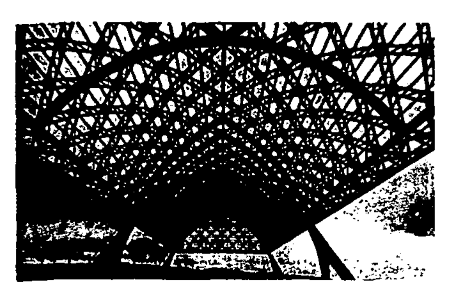
Système préfabriqué Mero, 1957, ing. M. Mengeringhausen

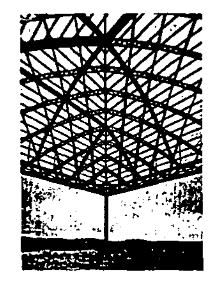


Projet d'un hangar démontable pour l'aviation militaire des Etats-Unis, 1951, arch. K. Wachsmann

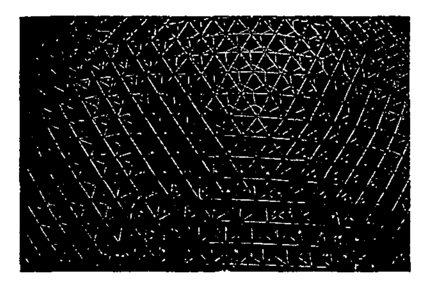
Les voûtes et les coupoles constituées de treillis

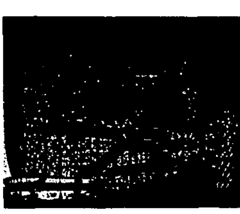
Les grilles de treillis et les treillis spatiaux peuvent également constituer la structure portante de voûtes et coupoles. Les images ci-contre montrent une voûte en arc-de-cloître en béton armé construite par P.L. Nervi et la coupole géodésique de Buckminster Fuller qui a déjà été présentée (cf. p. 100).



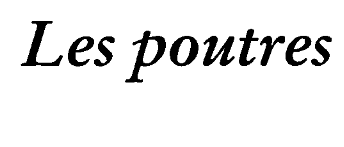


Hangar pour l'aviation italienne en éléments préfabriqués en béton armé, 1940, ing. P.L. Nervi (grille de treillis constituant une coque en forme de voûte en arc-de-cloître soutenue par six appuis, dimensions 100 × 40 m)



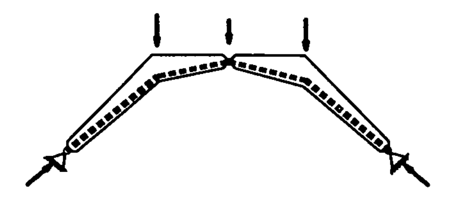


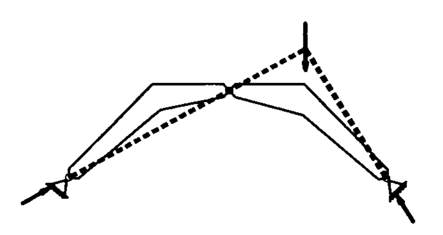
Pavillon des Etats-Unis à l'Exposition universelle de Montréal, 1967, R. Buckminster Fuller (treillis spatial constituant une coupole géodésique, diamètre 76 m)

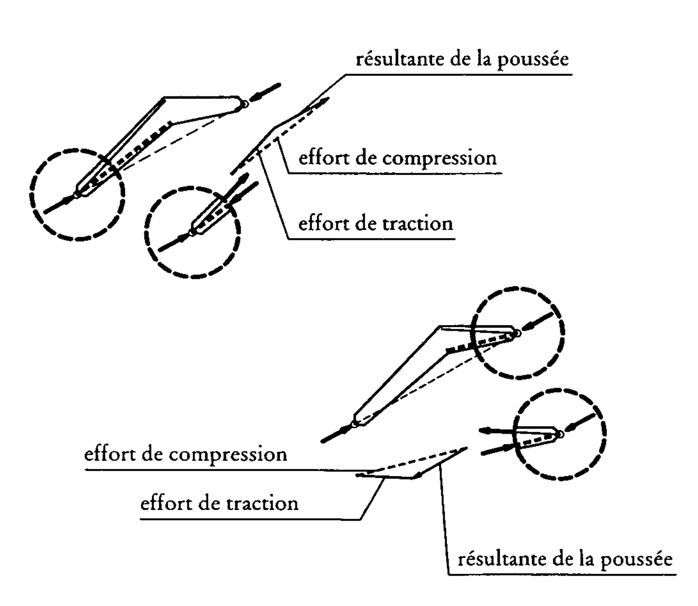


Les poutres

Le treillis comme aide à la compréhension du fonctionnement des arcs, poutres et cadres


Arc dont le fonctionnement est garanti même sans aucune résistance à la traction


Arc avec la résultante des efforts qui sort du matériau



Etude de possibles sollicitations dans le demi-arc à gauche

En étudiant les arcs, nous avons vu que leur fonctionnement effectif peut être mieux compris si on analyse la ligne d'action des efforts. Celle-ci n'est rien d'autre que le polygone funiculaire des charges. Si on associe à cette figure géométrique également une épaisseur et une largeur, de façon à obtenir une section de matériau suffisante pour reprendre l'effort de compression, on obtient la quantité minimale de matériau indispensable pour reprendre les charges, alors que tout le reste du matériau pourrait en théorie être éliminé. Si ce matériau est conservé, il recevra lui aussi une part de sollicitation. La ligne d'action des efforts, avec son aire minimale, est donc un instrument qui nous aide à comprendre le fonctionnement de l'arc réel, plutôt que d'offrir une description complète de la sollicitation effective du matériau. Grâce à cette aide, nous avons vu par exemple que la structure fonctionne même sans aucune résistance à la traction, si l'arc funiculaire peut être complètement inscrit à l'intérieur de l'arc réel.

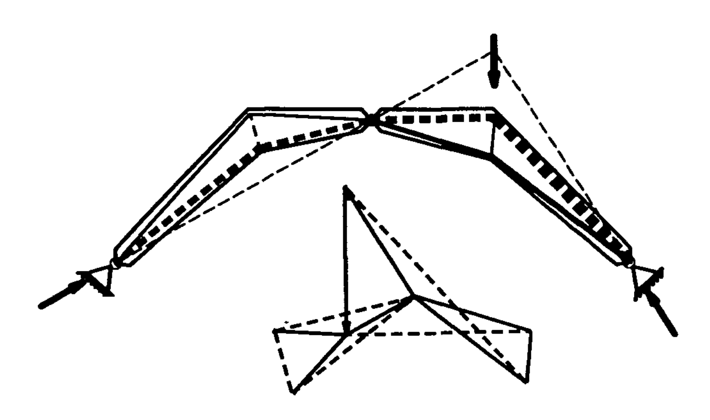
Sur la base de ce que nous avons appris en étudiant les treillis, nous pouvons maintenant chercher à comprendre ce qui se produit quand l'arc funiculaire sort du matériau à disposition.

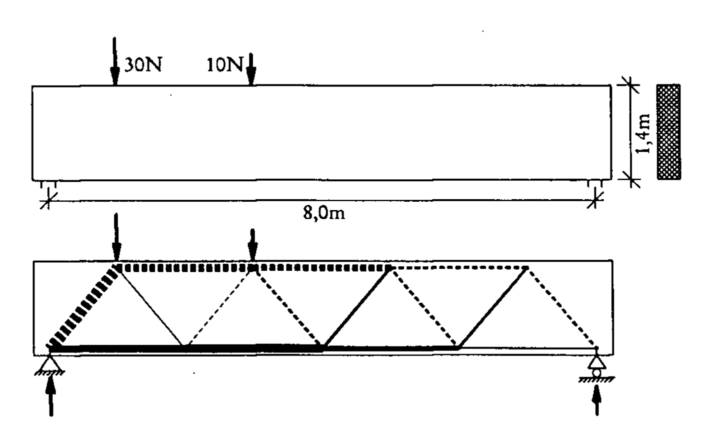
Considérons par exemple l'arc représenté ci-contre, sollicité par une seule charge agissant sur le demi-arc de droite, et commençons l'analyse avec l'autre demi-arc. En l'absence de charges externes sur ce tronçon (négligeons le poids propre de la structure), la ligne d'action des sollicitations est une droite qui relie les deux articulations et qui sort ainsi du matériau dans la partie centrale. N'oublions pas que cette droite représente la ligne d'action de la résultante des efforts internes qui est donc, elle aussi, partiellement en dehors du matériau. Nous pouvons décomposer la résultante des efforts en un effort de compression, qui suit le bord du matériau, et un effort de traction. Celui-ci est nécessaire pour dévier la compression qui agit à l'origine sur l'articulation à la base de l'arc. De cette façon, la zone comprimée et la zone tendue restent comprises dans les limites de la structure.

Comme nous le constatons en analysant un sous-système qui inclut la zone autour de l'appui, l'intensité de l'effort de compression est augmentée de façon importante: c'est la conséquence que nous devons subir pour dévier sa ligne d'action et pour la maintenir à l'intérieur du matériau.

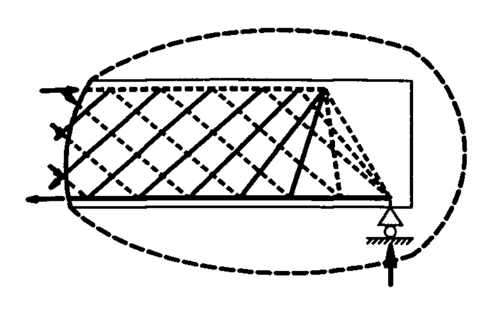
Une approche semblable peut être utilisée pour dévier la compression au droit de l'articulation au faîte. Dans cette zone aussi, il est nécessaire d'insérer une barre tendue pour dévier la barre comprimée vers le haut.

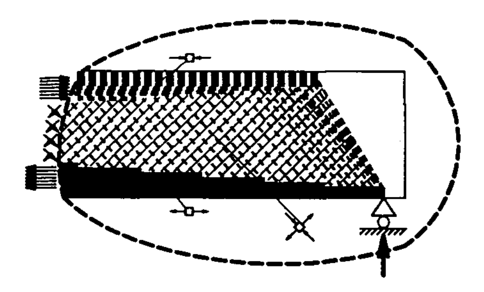
L'inclinaison des nouvelles barres comprimées doit être choisie de façon qu'en aucun point elles ne sortent du matériau. Elles doivent donc converger vers le point où l'intrados de l'arc subit une brusque déviation. La même considération peut être faite également pour les barres tendues: elles ne peuvent pas non plus sortir du matériau et doivent converger en un point où elles peuvent être déviées. On peut ainsi construire un véritable treillis en introduisant une barre supplémentaire, en mesure de reprendre l'effort de déviation des barres comprimées et de le transmettre là où les barres tendues sont déviées, de façon à le compenser.
Un treillis similaire peut être construit pour le demi-arc de droite. Dans ce cas, le polygone funiculaire des charges sort de l'extrados. Il faut donc prévoir des barres comprimées qui suivent le bord supérieur de la structure, et qui pour cette raison sont déviées vers le bas par des barres tendues situées à proximité de l'intrados. Dans ce cas aussi, une barre supplémentaire dans la partie centrale, sollicitée cette fois à la traction, reprend et transmet les efforts de déviation des autres barres.
Le treillis complet avec des barres tendues et comprimées est fort utile pour comprendre le fonctionnement d'un arc dans lequel la ligne d'action des efforts sort du matériau. Comme nous le constatons, la structure peut fonctionner, à condition que le matériau soit en mesure de résister non seulement à l'effort de compression, mais aussi à celui de traction. Une structure de ce type doit donc être construite en acier, ou bien en béton avec une armature en acier, résistante à la traction, ou bien encore en bois, mais elle ne peut pas fonctionner si elle est construite en maçonnerie. Nous constatons d'autre part que les efforts, surtout ceux de compression, sont nettement plus grands que ceux de la structure avec la ligne d'action à l'intérieur du matériau. Cette dernière structure est donc plus efficace.
L'approche décrite pour l'arc peut très bien être employée pour décrire n'importe quelle structure massive. Une des applications les plus courantes est celle de la poutre. La figure ci-contre représente une poutre simple qui rappelle, aussi bien par sa géométrie que par les charges qui y sont appliquées, le treillis analysé précédemment (cf. p. 125). Sa hauteur est légèrement plus importante que celle du treillis; nous pouvons donc inscrire celui-ci directement dans la poutre, de façon à obtenir un modèle facilement interprétable: les barres en compression de la membrure supérieure reprennent la sollicitation présente dans la zone comprimée de la poutre, la membrure inférieure correspond à la zone tendue. Alors que les efforts des diagonales, aussi bien en traction qu'en compression, sont repris par la zone intermédiaire.


Treillis complet comme description du fonctionnement d'un arc, dans lequel la résultante des forces sort du matériau



Sollicitations d'une poutre décrites avec l'aide d'un treillis





Zone intermédiaire occupée par des diagonales superposées et répartition des sollicitations dans tout le matériau à disposition (répartition constante des sollicitations dans la zone comprimée et dans la zone tendue)

La sollicitation de la zone intermédiaire des poutres

En réalité, les diagonales représentent une simplification des sollicitations effectivement présentes. Puisque nous avons du matériau en tout point entre les diagonales, celui-ci participe également à reprendre une partie des sollicitations. C'est comme si on instaurait d'innombrables diagonales avec une sollicitation répartie sur toute la matière. Si nous isolons un sous-système infinitésimal avec la forme d'un petit cube de la zone intermédiaire, nous observons deux sollicitations: celle qui correspond à la diagonale comprimée et celle de la diagonale tendue. La même portion de matériau est donc sollicitée en même temps à la traction et à la compression, mais avec des lignes d'action des efforts qui sont perpendiculaires entre elles. Nous avons déjà rencontré une situation de ce type dans les membranes, où le même élément était sollicité à la traction dans deux directions, ou bien dans les coques, où une sollicitation de compression dans une direction était accompagnée par une autre de traction ou de compression dans l'autre.

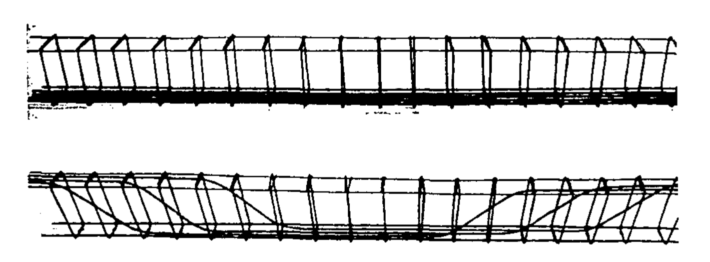
La sollicitation de la zone tendue et de la zone comprimée

La zone supérieure comprimée et la zone inférieure tendue ne restent pas non plus confinées dans la membrure du treillis, comme le prévoyait notre hypothèse, mais tendent à occuper tout l'espace à disposition. Ce sont surtout les zones à proximité des bords qui sont plus sollicitées, de façon à obtenir une hauteur effective suffisamment grande. La répartition exacte de la sollicitation dans la zone tendue et dans la zone comprimée dépend essentiellement du comportement du matériau (linéaire élastique ou plastique), et est habituellement étudiée de façon détaillée par l'ingénieur, de façon à obtenir une valeur exacte des déformations et de la résistance. Dans le cadre de cet ouvrage, nous simplifierons le tout, en faisant l'hypothèse d'une répartition constante des contraintes de compression et de traction. Ceci correspond en réalité à la situation que l'on a dans une poutre constituée de matériau parfaitement ductile (par exemple l'acier) et soumise à des charges intenses (la zone comprimée et la zone tendue se présentent dans la phase plastique avec l'écoulement complet du matériau).

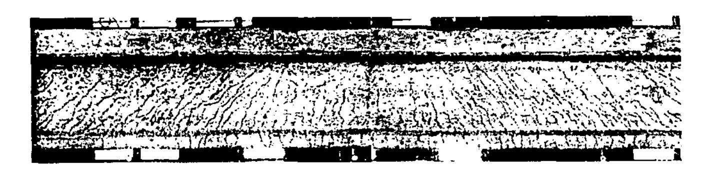
Les poutres en béton armé

Si un matériau résiste surtout à la compression, alors que sa résistance à la traction est limitée, il faut prévoir un renforcement en mesure de reprendre les efforts de traction. C'est le cas par exemple du béton qui est habituellement renforcé par une armature en acier. Celle-ci doit être disposée là où des efforts de traction sont attendus: dans la zone inférieure de notre poutre et dans la zone intermédiaire dans la direction des diagonales tendues.

Les images ci-contre montrent deux armatures en acier possibles pour une poutre simple chargée à mi-travée. On reconnaît bien les armatures longitudinales qui reprennent l'effort de traction dans la partie inférieure de la poutre. Dans l'exemple du dessus, l'armature de la zone intermédiaire est disposée verticalement, comme dans le cas des montants tendus d'un treillis en N. Dans le second exemple, moins fréquent dans la pratique, on a par contre des armatures inclinées, comme s'il s'agissait d'un treillis avec diagonales en V. D'autre part, l'armature longitudinale inférieure est concentrée dans la zone centrale, où l'effort est le plus grand. On voit bien aussi les minces armatures longitudinales supérieures qui servent surtout à tenir les autres armatures pour empêcher leur déplacement durant la mise en place du béton. C'est en effet le béton qui a pour fonction de résister aux efforts de compression présents dans cette zone, de sorte que l'armature n'est pas nécessaire d'un point de vue statique. La figure ci-contre montre les fissures dans une poutre en béton très sollicitée. Dans la zone inférieure, les nombreuses fissures indiquent que le béton a complètement cédé à l'armature la tâche de reprendre l'effort de traction, alors que dans la zone supérieure parfaitement intacte le béton exerce pleinement sa fonction qui est celle de résister aux efforts de compression. Dans la zone intermédiaire, on voit en revanche de nombreuses fissures inclinées: il subsiste entre deux fissures une étroite zone intacte de béton qui fonctionne comme une diagonale comprimée, alors que l'armature verticale ou inclinée qui les traverse reprend l'effort comme le feraient les diagonales tendues dans un treillis.



Barres d'acier pour la reprise des efforts de traction dans une poutre simple en béton armé

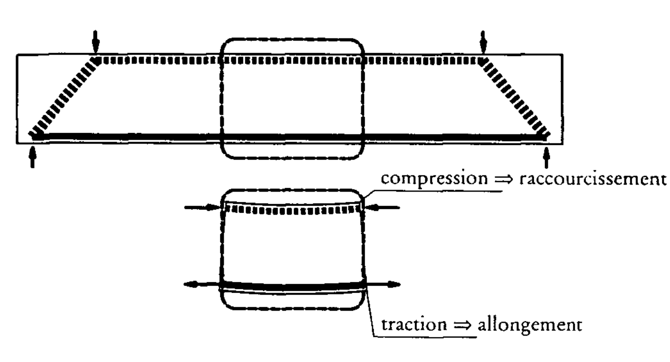


Fissures dans une poutre en béton armé

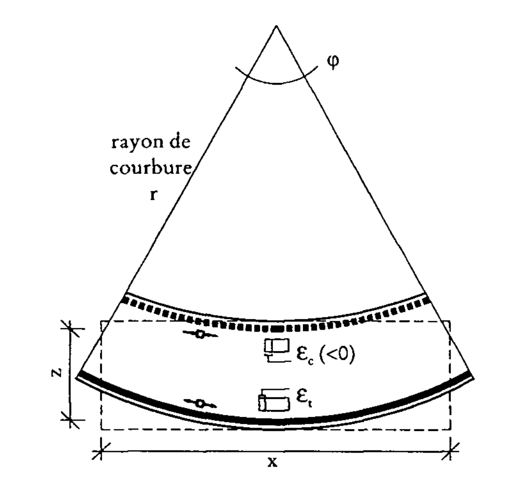
La flexion simple d'une poutre

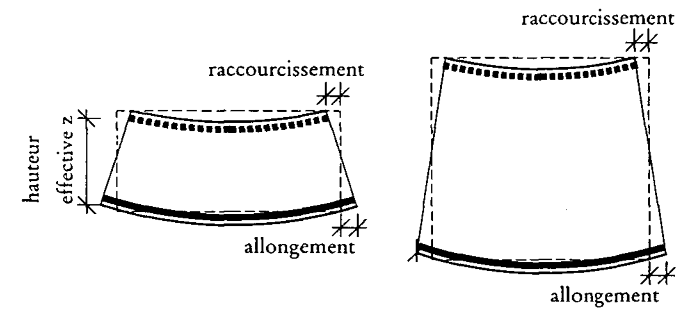
Si, dans un treillis à membrures horizontales, l'arc funiculaire des charges est lui aussi horizontal (effort tranchant nul), les diagonales ne sont pas sollicitées. De façon analogue, dans la poutre aussi les efforts internes se limitent à la compression et à la traction longitudinales qui se concentrent dans les zones à proximité des bords de la section. Ce type de sollicitation est appelé flexion simple.





Flexion d'une poutre et déformations résultantes





A déformations égales, la courbure est inversement proportionnelle à la hauteur effective

La flexion et la courbure

Le terme «fléchir» est généralement considéré comme un synonyme de «plier» et de «courber». En effet, l'effort dans la zone tendue a pour résultat un allongement du matériau, alors que la compression produit un raccourcissement du côté opposé. Si on isole un fragment de poutre comme un sous-système et si on analyse les déformations du matériau, on peut effectivement observer un «pliage» ou une «courbure» de la poutre.

La courbure d'une poutre est donc l'effet de la flexion (considérée comme sollicitation), tout comme l'allongement ou le raccourcissement sont le résultat d'une sollicitation de traction ou de compression.

Evidemment, plus l'allongement de la zone tendue et le raccourcissement de la zone comprimée sont grands, plus la courbure de la poutre est grande. Un autre paramètre qui influence la courbure est la hauteur de la poutre ou, pour être plus précis, la distance entre le centre de gravité de la zone tendue et celui de la zone comprimée. Par la suite nous appellerons *hauteur effective* z cette distance interne. Les figures ci-dessous montrent deux poutres de différente hauteur avec des déformations identiques. Nous pouvons constater qu'à une hauteur effective plus faible correspond une courbure plus grande et réciproquement.

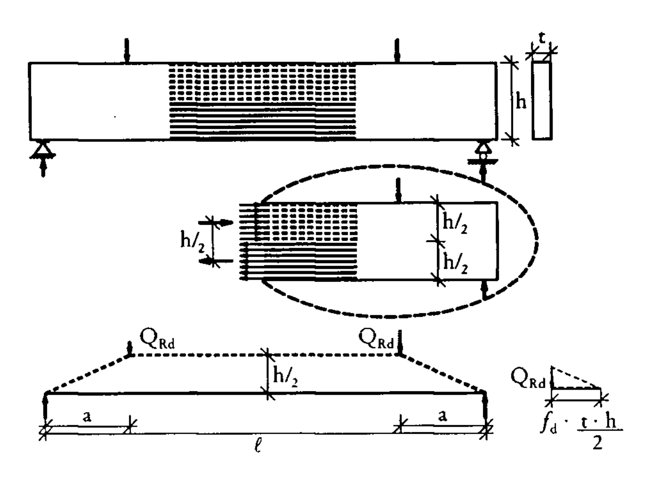
La résistance des poutres sollicitées à la flexion

Après avoir décrit comment une poutre sollicitée à la flexion se déforme, considérons maintenant sa résistance à la flexion. Celle-ci est atteinte quand toute la zone comprimée à disposition et toute la zone tendue sont sollicitées par une contrainte égale à la résistance du matériau.

Comme nous l'avons déjà observé, l'hypothèse d'une sollicitation constante sur toute la zone comprimée et sur toute la zone tendue vaut, en réalité, uniquement pour les matériaux ductiles, comme par exemple l'acier. Pour les matériaux fragiles, la rupture se produit quand la sollicitation maximale, qui est habituellement localisée sur le bord de la poutre, atteint la résistance du matériau. Nous laisserons de côté l'approfondissement de ce thème et nous suivrons l'approche avec une intensité constante, qui nous permettra de déduire les considérations qui, pour le moment, nous intéressent. Pour simplifier, nous considérerons de plus un matériau avec la même résistance f_d aussi bien en traction qu'en compression.

Si nous voulons déterminer les charges qui conduisent à la rupture de la poutre (charges qui correspondent à la résistance de la poutre), nous devons:

- inscrire dans la poutre un treillis (ou une structure funiculaire à poussée compensée);
- déterminer la résistance des membrures, en multipliant la contrainte (résistance f_d à la compression et à la traction) par l'aire de la zone (qui dans le cas d'une poutre à section rectangulaire vaut simplement $A = t \cdot h/2$) et
- trouver les charges de rupture correspondantes au moyen d'un diagramme de Cremona.

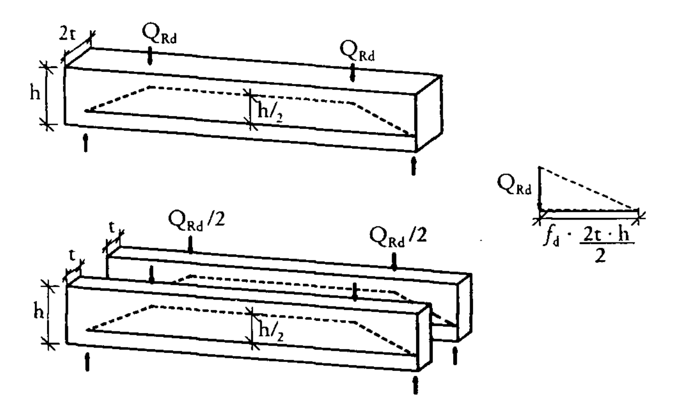


Résistance d'une poutre avec les sollicitations de la zone comprimée et de la zone tendue (matériau ductile) et charges correspondantes

On peut observer que la hauteur du treillis, ou de la structure funiculaire à poussée compensée, doit correspondre à la hauteur effective de la poutre (distance entre la résultante des sollicitations dans la zone tendue et la résultante dans la zone comprimée). Dans le cas d'une poutre à section rectangulaire, la hauteur effective z à la rupture correspond exactement à la moitié de la hauteur totale h. Quand les sollicitations sont plus faibles, les zones comprimées et tendues occupent un espace plus petit, de sorte que la hauteur effective z peut être plus grande.

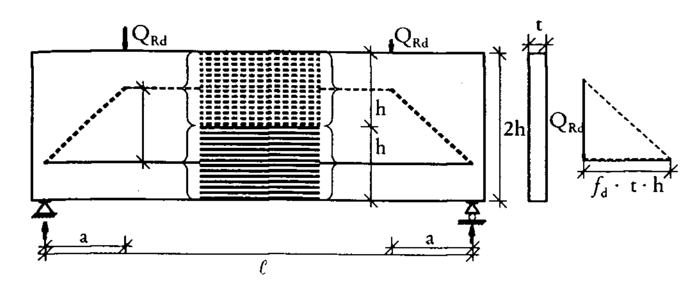
L'influence des dimensions d'une poutre à section rectangulaire sur sa résistance

Faisons maintenant varier les dimensions d'une poutre à section rectangulaire et étudions leur influence sur la résistance. Varions tout d'abord l'épaisseur t jusqu'à la doubler. Les aires de la zone tendue et de la zone comprimée sont elles aussi doublées, de sorte que les efforts aussi doublent par rapport à ceux de la poutre avec l'épaisseur initiale t. La forme du treillis que nous inscrivons dans la poutre demeure en revanche inchangée, parce que la hauteur de la poutre et la distance des barres du treillis par rapport au bord de la poutre (qui dépend de la hauteur des zones en compression et en traction) n'ont pas changé. On obtient donc un diagramme de Cremona avec des efforts doubles et des pentes identiques, de sorte que les charges qui conduisent à la rupture de la nouvelle poutre sont elles aussi doublées. Ceci ne doit certainement pas nous surprendre si nous considérons le fait que la poutre d'épaisseur double (2t) peut simplement être interprétée comme la somme de deux poutres avec épaisseur t disposées l'une à côté de l'autre.

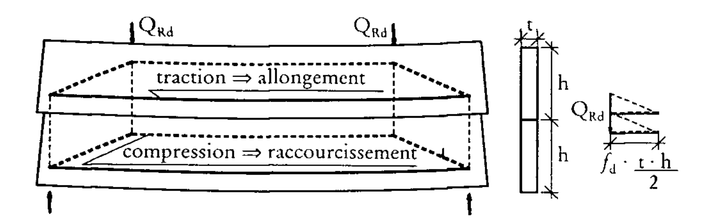


Influence de l'épaisseur d'une poutre sur sa résistance: en doublant l'épaisseur, on double aussi la résistance (comme si on avait deux poutres)

Faisons maintenant l'hypothèse de doubler la hauteur h, sans changer les autres dimensions. Dans ce cas aussi, les aires et les efforts dans les zones en traction et en compression doublent, mais à la différence du cas précédent, la



Influence de la hauteur de la poutre sur sa résistance: en doublant h, on obtient une résistance quadruple



Comportement de deux poutres superposées

hauteur effective z double aussi, ainsi que celle du treillis. A partir du diagramme de Cremona, il apparaît évident qu'avec des efforts horizontaux doubles et une pente de la barre inclinée elle aussi doublée, on obtient une charge de rupture quadruplée.

A première vue, ce résultat peut sembler surprenant: en doublant la hauteur, avec donc une quantité double de matériau, nous obtenons une résistance quadruplée. Cependant, si nous disposions deux poutres identiques l'une sur l'autre, nous obtiendrions un doublement de résistance. Si nous observons attentivement cette situation, nous constatons toutefois que le système porteur et les déformations correspondantes sont fondamentalement différentes de celles d'une poutre avec hauteur double: si les deux poutres superposées ne sont pas reliées entre elles, deux systèmes porteurs indépendants s'instaurent, chacun avec sa zone tendue et sa zone comprimée. La surface de contact entre les deux poutres sépare la zone tendue de la poutre supérieure, qui tend à s'allonger, de la zone comprimée de la poutre inférieure qui tend au contraire à se raccourcir. On a donc un glissement entre les deux poutres. C'est seulement si on empêche ce mouvement relatif, par exemple en collant ou en soudant entre elles les deux poutres, qu'on pourra obtenir un transfert des efforts entre la zone tendue, qui peut alors occuper toute la poutre inférieure, et la zone comprimée, qui occupe toute la poutre supérieure. C'est seulement dans ce cas que nous obtenons une résistance quadruple par rapport à celle de la poutre initiale.

Ces considérations confirment ce que nous avions vu avec les câbles, les arcs et les treillis: une structure est plus efficace en termes d'emploi de matériau si son élancement (portée/hauteur) n'est pas trop grand. En d'autres termes, il vaut beaucoup mieux disposer le matériau en hauteur plutôt qu'en largeur. Cette conclusion est toujours valable, à condition que des phénomènes d'instabilité ne puissent pas se produire.

Si nous conservons la section avec sa hauteur h et son épaisseur t, et si nous doublons maintenant la portée ℓ et les autres distances horizontales, nous avons de nouveau les mêmes dimensions et résistances de la zone comprimée et tendue, mais nous obtenons une inclinaison réduite de moitié des barres inclinées, de sorte que la résistance Q_{Rd} est elle aussi réduite de moitié.

A partir de la figure en haut de la page précédente, nous pouvons déduire une loi mathématique qui lie les dimensions de la poutre et la résistance du matériau à la charge de rupture de

la poutre (résistance de la poutre). Si nous considérons l'affinité entre le triangle du diagramme de Cremona et le triangle qui est défini dans la structure par la barre inclinée, nous constatons que la charge de rupture Q_{Rd} est à la résistance de la zone tendue (ou comprimée) comme la hauteur effective h/2 est à la distance a (distance entre charge et appui). Nous obtenons ainsi l'équation

$$Q_{Rd} = f_d \cdot \frac{t \cdot h^2}{4 \cdot a}$$

qui résume ce que nous venons de voir: la résistance Q_{Rd} de la poutre dépend directement de la résistance du matériau f_d, de la largeur t et du carré de la hauteur h (double hauteur, résistance quadruple), alors qu'elle est inversement proportionnelle à la distance a. Si nous sommes en présence d'un matériau fragile, le 4 au dénominateur doit être remplacé par un 6 pour tenir compte de la répartition non constante des contraintes dans la zone tendue et dans la zone comprimée.

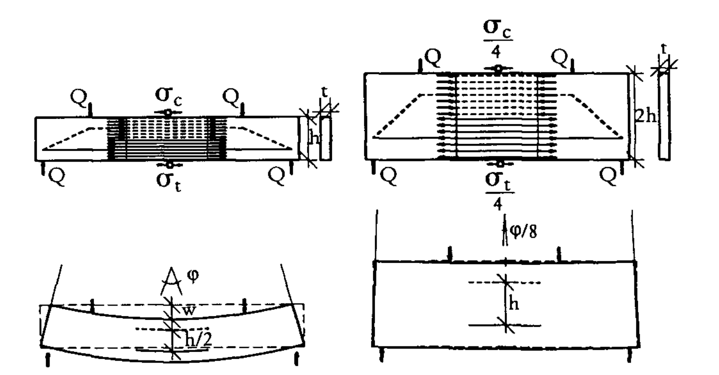
L'influence des dimensions d'une poutre à section rectangulaire sur sa rigidité

Nous avions vu, en analysant les barres sollicitées à la traction ou à la compression, que la rigidité de ces structures simples dépend de la rigidité du matériau (module d'élasticité E), de l'aire de la section et de la longueur de la barre (cf. p. 13). Nous pouvons également trouver des relations analogues pour la poutre sollicitée à la flexion. Dans ce cas aussi, nous définissons la rigidité de la structure comme le rapport entre la charge Q que nous appliquons et le déplacement w qui en résulte.

L'influence de l'épaisseur t est facile à décrire: en la doublant, nous obtenons des sollicitations diminuées de moitié dans la poutre, de sorte que les déformations et le déplacement diminuent aussi de moitié. Nous obtenons donc une rigidité double, exactement comme si nous avions disposé deux poutres identiques l'une à côté de l'autre; en d'autres termes, la rigidité est directement proportionnelle à l'épaisseur.

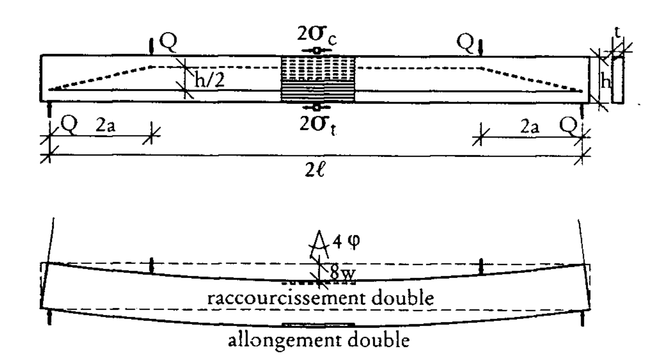
Si nous doublons la hauteur h en conservant la charge Q et les autres dimensions, nous obtenons:

– la hauteur effective z double, de sorte que les efforts dans les membrures de la structure funiculaire qui décrit le fonctionnement de la poutre diminuent de moitié;
– les aires de la zone comprimée et de la zone tendue doublent elles aussi ($t \cdot h$ au lieu de $t \cdot h/2$);



Sollicitations, déformations et déplacements dans une poutre d'une hauteur h et dans une poutre de hauteur double

– la contrainte de traction et de compression que nous obtenons en divisant l'effort par l'aire est donc 1/4 de la contrainte dans la poutre originelle,
– il en résulte que les déformations de la zone tendue et de la zone comprimée que nous obtenons en divisant les contraintes par le module d'élasticité sont elles aussi réduites à 1/4;
– comme relevé précédemment (cf. p. 161), la courbure est proportionnelle aux déformations, alors qu'elle est inversement proportionnelle à la hauteur effective z.



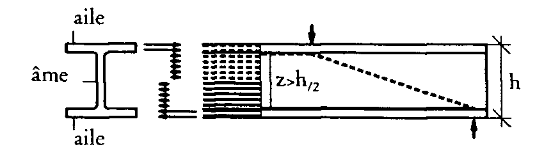
Sollicitations, déformations, courbure, angle de rotation et déplacement dans une poutre de longueur double

En d'autres termes, si nous doublons la hauteur h, nous obtenons une rigidité huit fois plus grande (le déplacement correspond à celui de huit poutres disposées l'une à côté de l'autre, ou l'une sur l'autre, sans être reliées entre elles !). En effet, la rigidité d'une poutre rectangulaire dépend de la hauteur élevée au cube.
Doublons la portée ℓ et la distance a, en conservant la section de la poutre et la charge: l'effort, les sollicitations et les déformations doublent aussi, de sorte que la courbure double également. L'angle de rotation φ, qui dépend de la courbure et de la longueur, est alors quadruplé, alors que le déplacement, qui dépend de l'angle de rotation et de la distance, est huit fois plus grand que celui de la poutre de portée ℓ. En généralisant, nous pouvons affirmer que la rigidité d'une poutre chargée par des charges concentrées est inversement proportionnelle à sa portée élevée au cube.
En récapitulant, pour un rapport constant entre la distance a et la portée ℓ, nous pouvons dire que la rigidité de la poutre, définie comme le rapport entre la charge Q et le déplacement w, est proportionnelle à

$$\frac{E \cdot t \cdot h^3}{\ell^3}$$

Les sections les plus efficaces: sections en I

Les sections rectangulaires que nous avons étudiées jusqu'ici peuvent être améliorées de façon à obtenir une efficacité plus grande (résistance et rigidité), tout en maintenant la quantité de matériau constante. Comme nous l'avons déjà vu, il est possible d'augmenter l'efficacité en réduisant l'épaisseur t et en augmentant la hauteur h. Nous voulons toutefois chercher d'autres optimisations en conservant la hauteur totale h. Imaginons d'éliminer une partie de matériau du côté inférieur de la zone comprimée et de le disposer dans la partie supérieure, de façon à l'élargir. Si on répète la même opération avec la zone tendue, nous obtenons une section avec la



Section en I

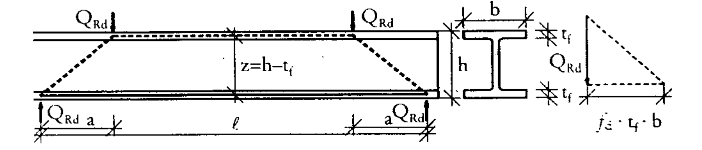
même surface et avec la même hauteur, mais avec une distance entre le centre de gravité de la zone tendue et celui de la zone comprimée fortement augmentée. Les sections de ce type, appelées *sections en I ou double T,* sont fréquemment employées dans les constructions métalliques. On peut en effet facilement les produire par le processus de lamination (acier), ou bien par extrusion (aluminium). Les parties horizontales, qui ont pour fonction de reprendre les efforts de traction et de compression dérivant de la flexion, sont appelées *ailes* ou *semelles*. Dans l'élément vertical, appelé *âme*, s'instaurent en revanche les efforts de traction et de compression qui correspondent aux efforts dans les diagonales d'un treillis.

L'influence des dimensions d'une poutre en I sur sa résistance à la flexion et sur sa rigidité

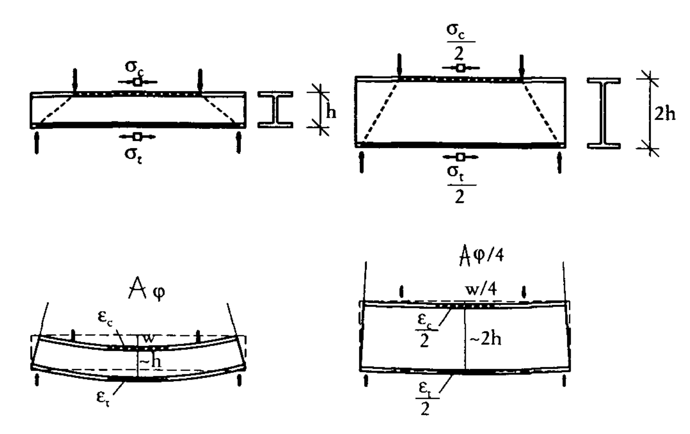
Pour une poutre sollicitée surtout à la flexion, il est donc opportun de choisir une section avec des ailes larges et épaisses et une âme mince. En réalité, au-delà d'une certaine limite, si les ailes sont trop larges et l'âme trop mince, le matériau ne peut pas être pleinement exploité, parce que des déformations transversales peuvent causer des instabilités locales avant d'atteindre l'écoulement du matériau.
Négligeons cet effet, et considérons une section idéale dans laquelle tout le matériau est disposé dans les ailes. Dans ce cas, la hauteur effective de la section, considérée comme la distance entre les centres de gravité de la zone comprimée et la zone tendue, se rapproche de la hauteur totale h (plus précisément $z = h - t_f$). Nous obtenons donc une hauteur effective presque double par rapport à celle de la section rectangulaire.
Dans ce cas aussi, la résistance de la poutre peut être déduite du diagramme de Cremona, en considérant son affinité avec le triangle défini par la barre inclinée, par la hauteur effective z et par la distance a entre la charge et l'appui. La charge de rupture Q_{Rd} est à la résistance de la zone tendue (ou comprimée) $f_d \cdot t_f \cdot b$ comme la hauteur effective $h - t_f$ est à la distance a. A partir de cette relation, nous obtenons

$$Q_{Rd} = f_d \cdot t_f \cdot b \cdot \frac{(h - t_f)}{a} \approx f_d \cdot t_f \cdot \frac{b \cdot h}{a}$$

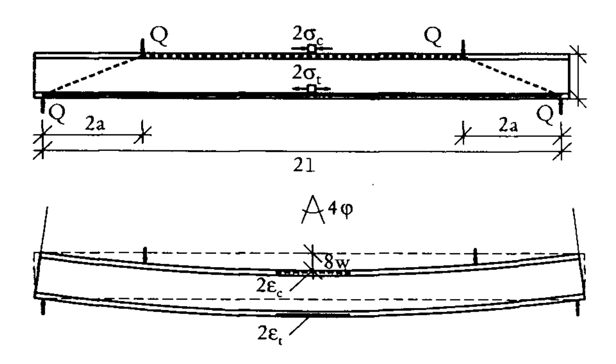
qui indique que la résistance dépend linéairement de la hauteur et non pas de son carré, comme dans le cas de la section rectangulaire.
Si nous considérons maintenant la rigidité de la poutre, celle-ci dépend linéairement de celle du matériau (module d'élasticité E) et de l'aire des semelles $b \cdot t_f$.



Résistance à la flexion d'une poutre en I en négligeant l'âme



Influence de la hauteur sur la rigidité



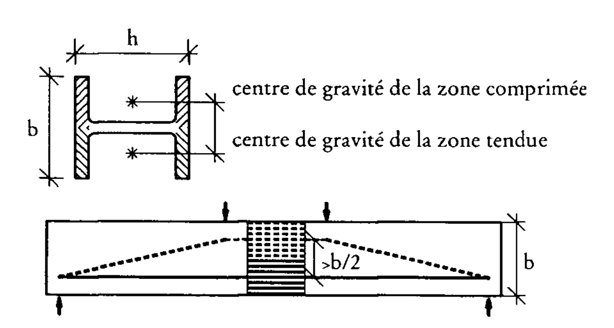
Déformation d'une poutre avec portée ℓ et distance a doublées

Pour trouver l'influence de la hauteur h, faisons l'hypothèse d'une poutre de hauteur double. Pour une charge donnée, nous aurons une contrainte réduite de moitié dans les ailes, et donc aussi une déformation réduite de moitié. L'angle de rotation φ, ainsi que le déplacement w, seront donc réduits à un quart. En d'autres termes, nous obtenons une rigidité quadruplée. La rigidité dépend donc de la hauteur h au carré. Essayons maintenant de doubler la portée et la distance a comme dans la poutre à section rectangulaire. Nous avons alors des efforts, contraintes et déformations doubles dans les ailes, une courbure elle aussi double, mais un angle de rotation φ quadruplé et un déplacement huit fois plus grand: dans ce cas aussi, la rigidité est inversement proportionnelle à la portée élevée au cube.
En résumé, si l'épaisseur de l'aile t_f est petite par rapport à la hauteur h et la hauteur effective est approximativement égale à la hauteur, la rigidité de la poutre exprimée comme rapport entre la charge Q et le déplacement w est proportionnelle à l'expression

$$E \cdot b \cdot t_f \cdot \frac{h^2}{\ell^3}$$

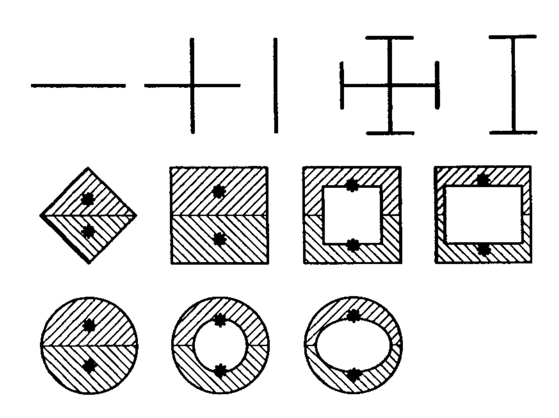
Le comportement d'une poutre en I avec les ailes verticales

Si nous faisons pivoter la poutre de 90° tout en conservant les charges qui agissent vers le bas, nous avons encore la zone comprimée située dans la moitié supérieure et la zone tendue qui occupe le matériau restant dans la partie inférieure. Les aires de ces zones, bien que subdivisées entre les deux ailes, sont égales à celles de la poutre non pivotée. Le centre de gravité de la zone comprimée s'abaisse toutefois, alors que celui de la zone tendue remonte, de sorte que la hauteur effective est beaucoup plus petite. Dans une section où h et b sont égales, la nouvelle hauteur effective (égale à b/2) est un peu plus que la moitié de la hauteur effective précédente ($h - t_f$). Le résultat est donc une résistance de la poutre diminuée de moitié.
Une section ainsi disposée est moins efficace également en ce qui concerne la rigidité. Si nous conservons la même charge, nous obtenons une sollicitation du matériau double à cause de la hauteur effective qui est réduite de moitié. L'angle de rotation φ, qui dépend comme nous l'avons vu aussi bien de la déformation que de la hauteur double également, de sorte qu'il résulte un déplacement quadruplé et une rigidité réduite à 1/4 de celle de la même poutre avec les ailes horizontales.
Il faudrait donc éviter de disposer les poutres en I avec leurs ailes verticales si les charges déterminantes sont elles aussi



Poutre avec section en I disposée avec les ailes verticales: si les dimensions h et b sont égales, la hauteur effective diminue presque de moitié par rapport à la poutre avec les ailes horizontales, de sorte que l'on obtient la moitié de la résistance et le quart de la rigidité

verticales. C'est précisément pour éviter des malentendus à cet égard que nous appelons cette section *en I ou en double T* et que nous évitons le terme de *section en H*.



Comparaison de l'efficacité à la flexion de différentes sections (pour des charges verticales) reportées en ordre croissant de gauche à droite (les astérisques indiquent le centre de gravité de la zone comprimée et de la zone tendue)

L'efficacité d'une section

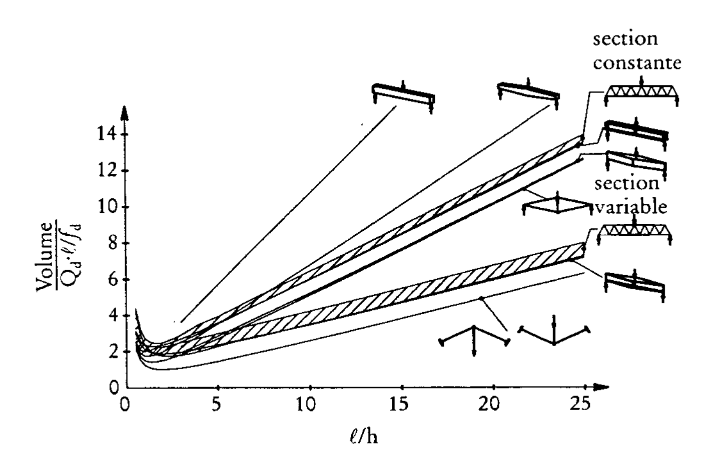
L'efficacité d'une section peut donc être définie par le rapport entre la hauteur effective et la hauteur nominale. Plus le matériau est disposé à proximité de la limite supérieure et de la limite inférieure, et plus l'efficacité de la section est grande. La figure ci-contre montre différentes sections en ordre croissant d'efficacité, de gauche à droite.

La forme, la section et l'efficacité structurale

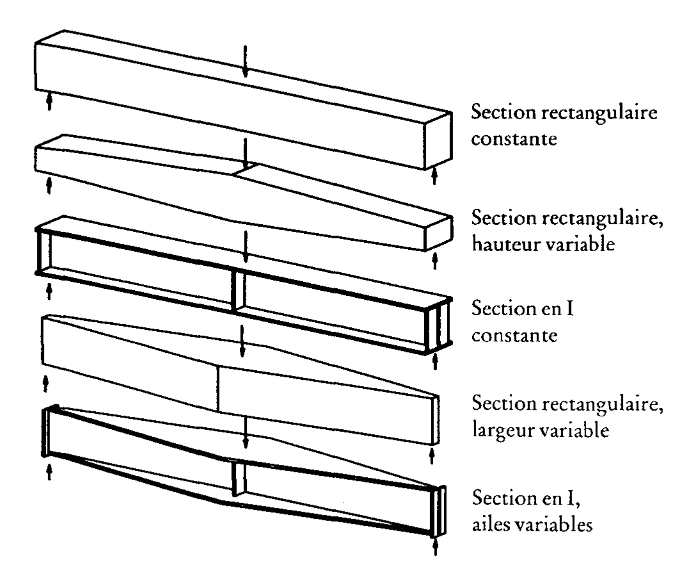
Comme nous l'avons vu, l'efficacité structurale d'une poutre dépend de sa section et de sa hauteur (hauteur × 2 d'une section rectangulaire ⇒ résistance × 4 et rigidité × 8), ou mieux encore du rapport portée/hauteur, appelé élancement. La figure ci-contre montre la quantité de matériau nécessaire pour reprendre une charge concentrée Q_d avec une poutre de portée ℓ en fonction de l'élancement. Le diagramme montre également les courbes qui se réfèrent aux câbles, aux arcs, aux structures funiculaires à poussée compensée et aux treillis. La poutre à section constante en I a une efficacité similaire à celle des treillis à membrures constantes. En effet, pour une même hauteur effective, les efforts sont comparables. D'autre part, la quantité de matériau nécessaire pour les diagonales du treillis est comparable à celle pour l'âme de la poutre qui remplit la même fonction, et est sollicitée de la même façon.

L'efficacité réduite des sections rectangulaires par rapport à celles en I est aussi clairement visible dans ce diagramme: pour un élancement donné, les sections compactes exigent beaucoup plus de matériau.

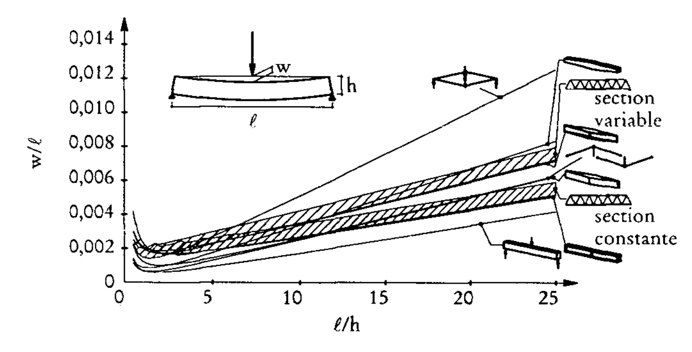
Comme dans les treillis, pour lesquels il est possible de réduire la quantité de matériau nécessaire en variant la section des barres en fonction de la sollicitation, dans les poutres aussi une variation de section sur leur longueur permet d'obtenir une économie considérable de matériau. Cette économie demeure toutefois souvent purement théorique, en raison des difficultés d'exécution. Il est par exemple extrêmement difficile de varier les sections laminées, et même impossible de varier les sections obtenues par extrusion, à moins que le matériau superflu soit éliminé après la production.



Quantité de matériau en fonction de l'élancement ℓ/h (pour une portée ℓ, une charge Q_d et une résistance du matériau f_d)



Possibles variations des sections dans une poutre chargée à mi-travée



Déplacement à mi-portée causé par une charge concentrée en fonction de l'élancement ℓ/h (déformation unitaire maximale dans le matériau : $\varepsilon = 0{,}001$)

La figure ci-contre montre différentes possibilités en ordre d'efficacité décroissante, du bas vers le haut (comme dans le diagramme). Dans les poutres en I, la variation de la section comporte l'adaptation de la largeur de l'aile ou de son épaisseur en fonction des sollicitations. Avec une charge qui agit à mi-portée, ces dimensions, nulles sur les appuis, varient *linéairement* jusqu'à atteindre le maximum au centre. Dans ces poutres, des raidisseurs (lamelles disposées verticalement, au droit des appuis et de la charge centrale) sont nécessaires pour reprendre la force appliquée et pour la transmettre à l'âme.
Il est également possible de faire varier la largeur ou la hauteur des sections rectangulaires. Dans le premier cas, le plus efficace, la largeur sur les appuis est nécessaire pour permettre aux poutres de reprendre les efforts qui sont présents dans les diagonales des treillis (effort tranchant).
Une structure est efficace non seulement si la quantité de matériau nécessaire pour garantir la résistance est limité, mais aussi si sa rigidité est importante. Le diagramme ci-contre montre le déplacement à mi-portée de notre poutre, en fonction de l'élancement. On retrouve de nouveau les courbes qui se réfèrent aux structures traitées précédemment, de façon à permettre une comparaison directe.
Les poutres à section constante, dans lesquelles une partie importante de matériau est superflue, ont des déplacements plus faibles. Ce matériau, qui n'est donc superflu que pour la seule résistance, a un effet positif sur les déformations. Il faut toutefois observer que si on disposait ce matériau dans les zones les plus sollicitées, son efficacité serait encore augmentée, dans la mesure où, pour une charge donnée, la sollicitation maximale du matériau et la déformation unitaire diminueraient.

Les poutres simples avec charges concentrées et avec charges uniformément réparties

Comme dans les treillis, nous utiliserons le terme *poutre simple* pour une poutre soutenue par des appuis situés aux deux extrémités. Les considérations sur la résistance, sur la rigidité et sur l'efficacité faites jusqu'ici pour les poutres sollicitées par des charges concentrées demeurent clairement valables en présence de charges uniformément réparties.
Si d'une part tous les aspects du fonctionnement peuvent être compris en inscrivant un treillis dans la structure, d'autre part aussi bien les sollicitations les plus importantes que le fonctionnement général peuvent aussi être décrits à l'aide d'une structure funiculaire à poussée compensée.

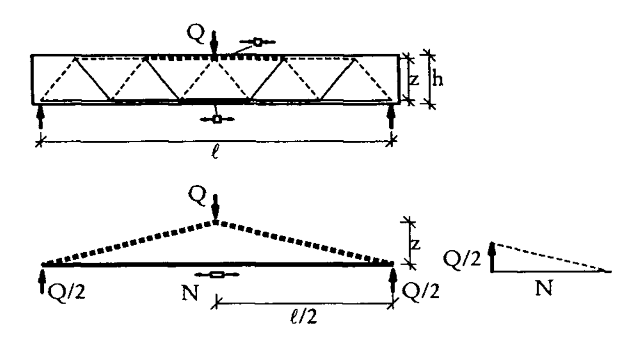
On voit ci-contre les constructions d'un treillis inscrit et de la structure funiculaire à poussée compensée pour une poutre simple soumise à une charge concentrée à mi-portée, et pour une autre poutre avec une charge uniformément répartie. Une fois la hauteur effective z connue, qui dépend essentiellement de la forme de la section, il est possible de quantifier les efforts dans la zone tendue et dans la zone comprimée.
En considérant l'affinité entre le triangle du diagramme de Cremona et le triangle défini par la hauteur effective z et par la distance $\ell/2$, que nous avions par ailleurs déjà établie pour le câble (cf. p. 36), nous obtenons pour la poutre avec charge concentrée:

$$N = \frac{Q \cdot \ell}{4 \cdot z}$$

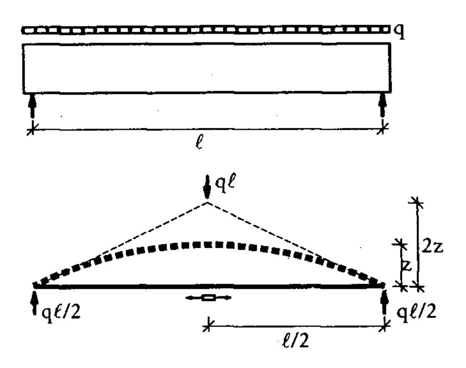
où N, en plus d'être l'effort dans le tirant de la structure funiculaire à poussée compensée, est aussi l'effort maximal dans la zone comprimée et dans la zone tendue à mi-portée de la poutre.
Le cas avec une charge uniformément répartie peut être ramené au cas précédent, si on considère la force concentrée Q comme la résultante de toute la charge répartie $q \cdot \ell$ et si on inclut le fait que la flèche de l'arc triangulaire de la résultante est le double de celle de l'arc funiculaire parabolique. En remplaçant $q \cdot \ell$ par Q et $2 \cdot z$ par z dans l'expression précédente, nous obtenons la nouvelle relation:

$$N = \frac{q \cdot \ell^2}{8 \cdot z}$$

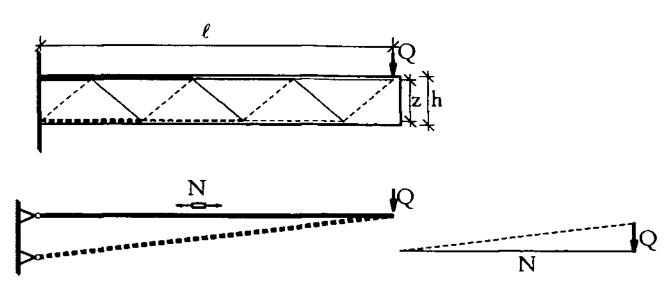
Si on compare ces deux expressions, nous constatons que la sollicitation est réduite de moitié si la charge est uniformément répartie. Ceci dérive du fait que la charge agissant à proximité des appuis sollicite de façon moins importante la partie centrale de la poutre. Ces expressions peuvent aussi être dérivées en divisant le moment fléchissant maximal (cf. annexe 3 à la p. 230) par la hauteur effective z.



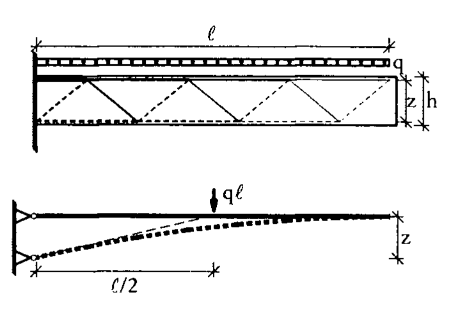
Poutre simple avec charge concentrée à mi-portée



Poutre simple avec charge uniformément répartie

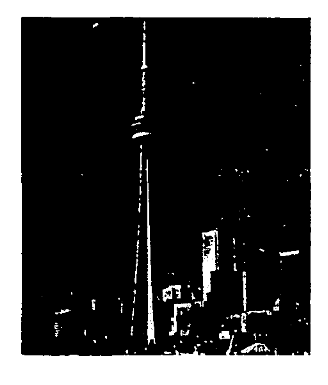


Console avec charge concentrée Q



Console avec charge uniformément répartie q


Arbres avec la forme du tronc qui suit la distribution des sollicitations (Pinus L., Prunus L., Quercus robur et Tilia cordata)


CN-Tower à Toronto, arch. E.R. Baldwin, ing. F. Knoll, A.G. Davenport, B. Thürlimann, h = 553 m

Consoles

Les consoles aussi peuvent être étudiées en y inscrivant des consoles en treillis et en analysant une structure funiculaire à poussée compensée correspondante, composée par exemple d'un arc inférieur et d'un tirant supérieur. A partir des conditions d'équilibre de cette structure, nous pouvons en déduire directement les sollicitations, qui correspondent à l'effort maximal de traction et de compression dans le treillis et dans la poutre.
Dans le cas d'une charge concentrée à l'extrémité nous avons

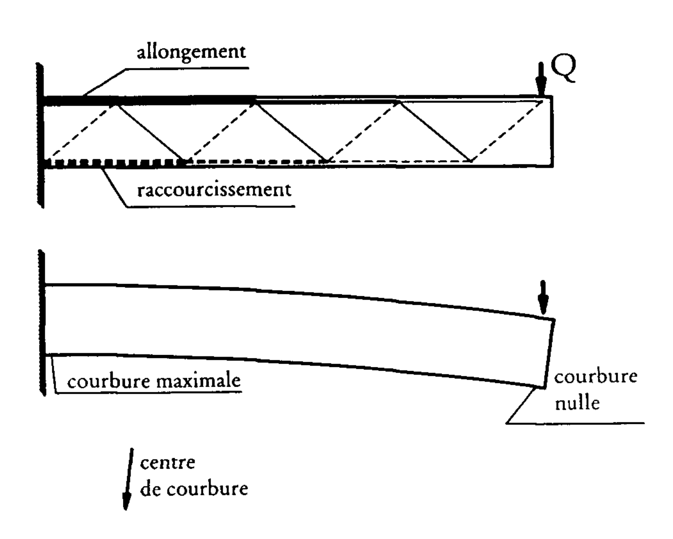
$$N = \frac{Q \cdot \ell}{z}$$

alors qu'avec la charge uniformément répartie, en considérant que sa résultante $q \cdot \ell$ agit à mi-portée de la poutre, nous obtenons

$$N = \frac{q \cdot \ell^2}{2 \cdot z}$$

La résistance des poutres peut être déterminée en comparant ces sollicitations avec les résistances des zones tendues et comprimées. Comme nous l'avons vu, nous avons $N_{Rd} = f_d \cdot t \cdot h/2$ et $z = h/2$, dans le cas de la section rectangulaire, et $N_{Rd} = f_d \cdot b \cdot t_f$ et $z = h - t_f$, pour la section en I avec âme mince.
Une console dans laquelle les sections suivent la distribution des efforts, possède une concentration de matériau surtout dans la zone de l'encastrement, alors que la section peut être amincie à l'extrémité.
Un exemple de cette distribution est représenté par la forme du tronc des arbres, dont la fonction structurale principale consiste à reprendre et transmettre au terrain la poussée horizontale du vent. Les bâtiments et les tours très hautes sont eux aussi principalement sollicités par le vent. C'est pourquoi les tours présentent souvent une variation de section semblable à la variation caractéristique des arbres.

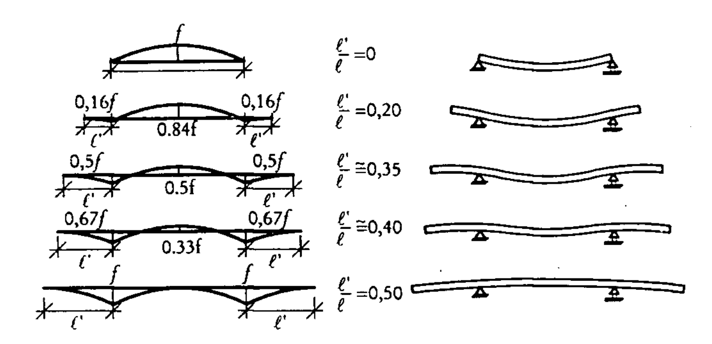
L'étude du treillis et de ses sollicitations nous permet de prévoir également les déformations. Si nous considérons que la zone supérieure, sollicitée à la traction, a tendance à s'allonger et la zone inférieure comprimée tend à se raccourcir, il en résulte que la console s'incurve vers le bas. Contrairement à la poutre simple, dans laquelle le centre de courbure se trouve au-dessus de la poutre, dans le cas de la console ce centre se trouve sous la structure.
D'autre part, puisque la sollicitation varie d'un maximum à l'encastrement jusqu'à s'annuler à l'extrémité, la courbure a la même allure.
En général, pour comprendre comment une poutre s'incurve, il suffit donc de considérer les sollicitations: le centre de courbure se trouve toujours du côté où la poutre est comprimée.



Sollicitations, déformations et déplacements d'une console

Les poutres avec consoles

Comme dans le cas des poutres en treillis, en ajoutant une ou deux consoles à une poutre simple, on obtient une réduction des sollicitations en travée. Si la charge est uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre, plus les consoles sont longues, et plus les sollicitations en travée seront réduites, et plus celles sur appuis seront importantes.
La figure ci-contre montre les structures funiculaires pour diverses poutres sollicitées par une charge uniformément répartie. La portée ℓ des poutres, considérée comme la distance entre les appuis, est toujours égale, de sorte que la flèche f de l'arc relatif à la partie centrale de la structure funiculaire à poussée compensée ne change pas. Dans les cinq exemples illustrés, on fait varier la longueur ℓ' de la console. La console a pour effet de rehausser le tirant et de subdiviser la flèche dans la travée en une composante supérieure et une composante inférieure. De cette façon, les efforts dans la poutre varient eux aussi. Souvenons-nous en effet que la distance entre l'arc et le tirant de la structure funiculaire à poussée compensée est proportionnelle aux sollicitations dans le treillis à membrures parallèles ou dans la poutre (cf. p. 126).
L'effet d'une console modérément longue sur les sollicitations dans la poutre est donc bénéfique: elle réduit les sollicitations dans la travée, là où les efforts sont généralement déterminants, et elle les augmente dans la zone des appuis. Si ℓ' vaut la moitié de la portée ℓ, l'arc reste toujours en dessous du tirant. Ce cas particulier fonctionne en réalité comme quatre consoles qui s'équilibrent entre elles deux par deux.



Poutres avec consoles: structures funiculaires correspondantes et déformations

Dans ce cas, l'effet bénéfique de la console est complètement annulé, dans la mesure où les sollicitations dans la zone des appuis, devenues désormais déterminantes, ont atteint la même intensité que celle que l'on peut rencontrer à mi-portée dans une poutre sans consoles.

On obtient une situation beaucoup plus équilibrée si ℓ' vaut environ 0,35 ℓ (plus exactement $\ell/\sqrt{8}$) et si la distance entre l'arc et le tirant dans la travée est identique à celle sur appuis. Dans ce cas, les sollicitations maximales sont diminuées de moitié par rapport à celles dans une poutre simple sans consoles. Cette situation est intéressante si la section de la poutre est constante: la structure est exploitée de la même manière sur appuis qu'en travée, de sorte que, si les dimensions sont celles qu'exige le critère de l'état limite ultime, la quantité excédentaire de matériau est réduite au minimum.

La figure montre aussi, à côté des structures funiculaires les poutres avec les courbures relatives et les déplacements résultants. Il est intéressant d'observer que les consoles, si elles ne sont pas trop longues, ont également un effet bénéfique sur les déplacements de la poutre.

En 1917, D'Arcy W. Thompson observa dans son ouvrage *Croissance et Forme* que de nombreux organismes du monde animal ont des formes qui rappellent la répartition des sollicitations dans les structures créées par l'homme. En particulier, les quadrupèdes, mammifères ou reptiles, peuvent être considérés, d'un point de vue structural, comme des poutres avec deux consoles, représentées par la tête et par la queue. Thompson représenta les diagrammes des moments fléchissants de divers quadrupèdes et décrivit leur analogie avec la forme réelle des animaux (cf. les figures reproduites ci-contre). On peut observer que le diagramme des moments fléchissants a exactement la même allure que celle des structures funiculaires (cf. p. 126). Ces analogies sont parfaitement compatibles avec la théorie de l'évolution: là où les sollicitations dans la «poutre» sont les plus fortes, un organisme évolue en augmentant la hauteur de la «structure», de façon que les os, avec leur fonction de résistance à la compression, et les tendons, sollicités à la traction, ne subissent pas d'efforts trop intenses. Une espèce est ainsi en mesure d'augmenter son efficacité et d'avoir une plus grande probabilité de survie.

De la même façon, dans l'architecture également on peut donner une telle forme à une poutre, de façon à disposer le matériau là où il est effectivement le plus sollicité.

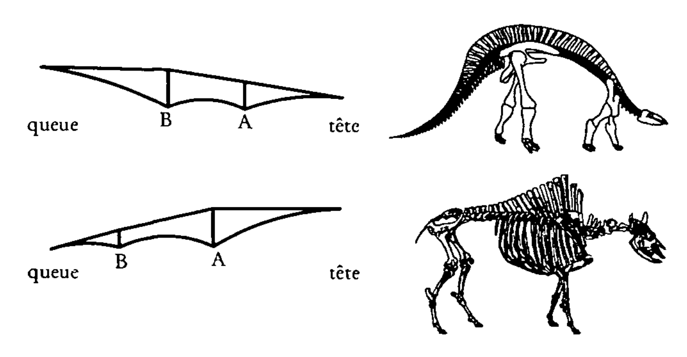
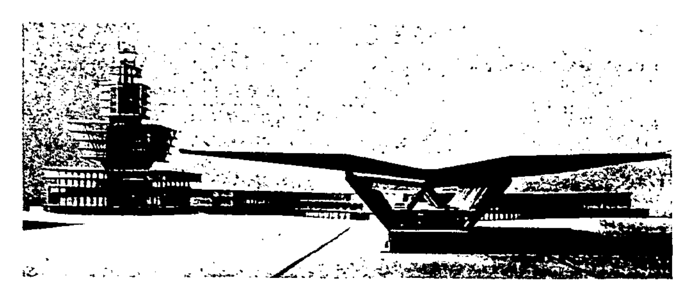


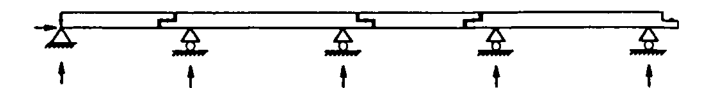
Diagramme des moments fléchissants représentés par D'Arcy W. Thompson (analogues aux structures funiculaires avec arcs et tirants) pour un dinosaure avec une queue très longue et lourde et pour un quadrupède avec un long cou et une lourde tête



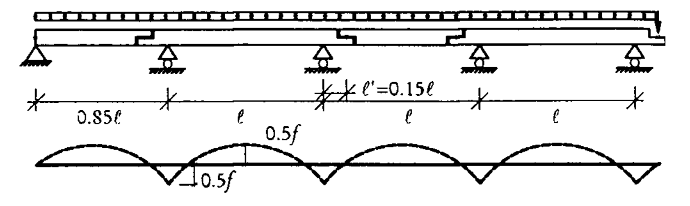
Exemple d'une poutre avec le matériau là où la sollicitation est la plus élevée, projet pour l'aéroport de Rome, 1957, arch. + ing. P. L. Nervi

Les poutres Gerber

Comme dans les treillis, on peut composer des poutres simples et des poutres avec consoles, de façon à obtenir une structure unique qui s'étend sur plusieurs appuis.
Il faut observer que le critère introduit pour vérifier l'isostaticité d'un treillis (cf. p. 120) fonctionne aussi pour les poutres. Si on l'applique à l'exemple représenté ci-contre avec six réactions, quatre barres (ou poutres) et cinq nœuds, nous obtenons en effet $6 + 4 = 2 \cdot 5$. Nous pouvons allonger comme nous le voulons ce système en ajoutant une paire de poutres et deux appuis à la fois. Puisqu'à chaque paire de poutres que nous ajoutons il faut aussi ajouter deux nœuds supplémentaires, l'équation devient $8 + 6 = 2 \cdot 7$, $10 + 8 = 2 \cdot 9$ et ainsi de suite.
Si nous analysons les consoles d'une poutre Gerber, nous devons considérer l'action de la charge uniformément répartie et de l'effort transmis par l'appui des poutres courtes. Les consoles sont donc plus sollicitées que les structures traitées précédemment (poutres avec consoles, cf. p. 172). Si dans une poutre Gerber nous voulons faire en sorte que la sollicitation des poutres courtes ait la même intensité que celle sur les appuis des poutres longues, nous devons alors réduire le rapport ℓ'/ℓ, défini précédemment. Pour une charge uniformément répartie, on obtient une situation optimale quand ℓ'/ℓ vaut environ 0,15.
Il est utile de respecter cette proportion si la section de la poutre est constante sur toute la longueur: dans les zones déterminantes, dans la travée et sur appuis, on obtient ainsi une sollicitation uniforme du matériau. Evidemment, il est aussi possible de varier la hauteur dans les poutres Gerber, de façon à l'adapter aux sollicitations. Dans l'exemple ci-contre, les poutres courtes posées sur les consoles ont leur plus grande hauteur en travée. Les poutres longues présentent en revanche une plus grande hauteur sur appuis, où elles sont dans ce cas les plus sollicitées. Théoriquement, sous l'effet des charges permanentes, les sollicitations les plus faibles des poutres longues se trouvent là où l'arc de la structure funiculaire croise le tirant. Dans ce cas aussi, comme dans les travées latérales du pont de H. Gerber (cf. p. 146), une hauteur suffisante est conservée dans ces zones, de façon à stabiliser la structure lorsqu'elle est sollicitée par des charges variables.



Isostaticité d'une poutre Gerber

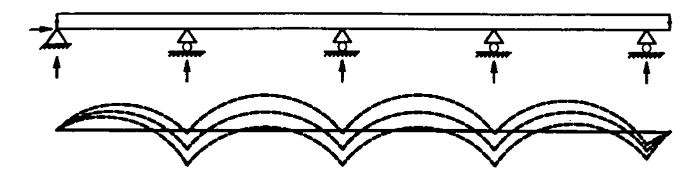


Poutre Gerber avec sollicitations identiques en travée et sur appuis



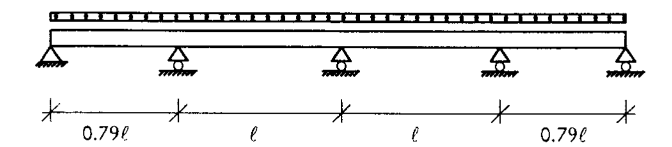
Pont autoroutier sur le Setta près de Bologne, 1958, ing. R. Morandi

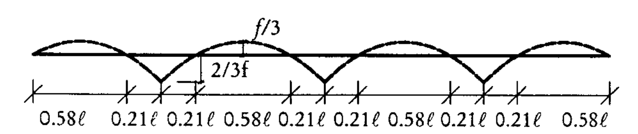
Les poutres continues


Hyperstaticité d'une poutre continue et possibles structures funiculaires correspondantes

Si nous disposons une seule poutre sur les appuis de la poutre Gerber étudiée précédemment, nous obtenons un système hyperstatique: $6 + 1 > 2 \cdot 2$. C'est comme si nous avions éliminé les articulations, de sorte que dans ces points l'arc de la structure funiculaire à poussée compensée a une position indéfinie, et que nous ne pouvons plus connaître son point de croisement avec le tirant. Nous pouvons en effet tracer un nombre infini de structures funiculaires à poussée compensée, toutes en équilibre avec les charges externes.

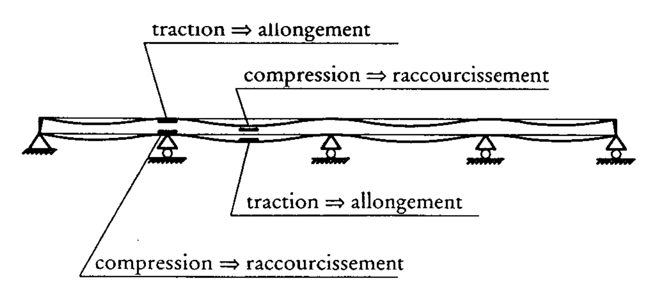
En réalité, il existe un seul état de sollicitation qui peut être décrit par une structure funiculaire bien définie. Celle-ci dépend toutefois non seulement des charges, mais aussi du comportement mécanique du matériau, de la distribution, de la rigidité de la structure et de toute une série d'actions, comme par exemple les variations de température, le déplacement des appuis et ainsi de suite.





Sollicitations d'une poutre continue avec rigidité constante et comportement élastique-linéaire

Si nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a aucune autre action à part la charge (si on enlève la charge, les sollicitations sont nulles dans tous les points de la poutre), que le comportement du matériau est linéaire-élastique et que la section de la poutre, avec sa rigidité, est constante, la structure funiculaire correspondant à une poutre continue, avec des portées régulières et soumise à une charge uniformément répartie sur toute la longueur, présente une distance du tirant qui correspond à 1/3 de la flèche totale en travée, et aux 2/3 restants sur appuis. En d'autres termes, les sollicitations de la zone comprimée et de la zone tendue sur les appuis sont le double de celles à mi-portée.

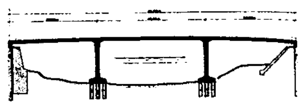


Déformations d'une poutre continue

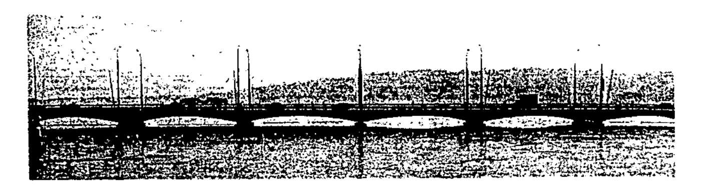
Du point de vue qualitatif, la situation est semblable à celle des poutres avec consoles et des poutres Gerber: en travée, la zone supérieure est comprimée, alors que la zone inférieure est tendue; sur appuis, la situation est inversée: zone supérieure tendue et zone inférieure comprimée. En effet, les sollicitations sont identiques à celles d'une poutre avec consoles avec $\ell' \approx 0{,}4 \cdot \ell$, dans laquelle la pente de la poutre sur les appuis s'annulle. Ceci est dû au fait que dans la poutre continue à portées égales, la zone au-dessus des appuis doit être horizontale, puisque cette section correspond à un axe de symétrie.

Les travées de rive, si elles sont aussi longues que les travées centrales, sont les plus sollicitées, parce que l'arc funiculaire, du fait qu'il rencontre le tirant sur le dernier appui, a une plus grande hauteur en travée. Pour éviter cet effet, il faut réduire leur portée. Si celle-ci équivaut à environ 0,8 fois la portée des travées centrales, soit la distance entre l'appui et le point d'intersection de l'arc et du tirant, on obtient des sollicitations identiques dans toutes les travées sous charges uniformément réparties.
Ce critère est habituellement utilisé dans la subdivision des travées d'un pont à poutre continue.
Les sollicitations dans la zone des appuis d'un pont à poutre continue sont généralement plus importantes que celles que l'on rencontre en travée. Une poutre continue dans laquelle les sections sont adaptées aux sollicitations prend donc une forme bien connue, avec une hauteur plus grande sur les appuis et un amincissement dans la travée. De cette façon, on obtient aussi une concentration bénéfique des charges permanentes à proximité des appuis.





Exemple de pont à poutre continue avec travées de rive 0,8 fois les travées centrales, pont sur le Tibre à Rome, 1972, ing. S. Zorzi



Poutre continue avec hauteur adaptée aux sollicitations

Les poutres bi-encastrées

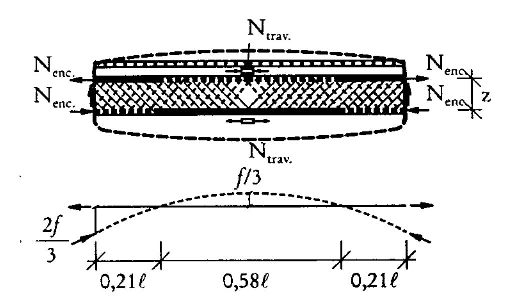
Si on isole, dans une poutre continue, un sous-système qui comprend une travée centrale, nous obtenons la situation représentée ci-contre. Au point où la poutre a été coupée nous devons introduire les efforts: traction dans la partie supérieure, compression dans la partie inférieure et un effort tranchant dans la zone intermédiaire qui correspond à la force transmise par les appuis. Ces sollicitations sont fort semblables à celles présentes à l'encastrement d'une console.
Dans le cas d'une charge uniformément répartie, au droit de l'encastrement, où la distance entre l'arc et le tirant atteint 2/3 de f, nous avons un effort dans la zone comprimée et dans la zone tendue égal à:

$$N_{enc.} = \frac{q \cdot \ell^2}{12 \cdot z}$$

alors qu'à mi-portée, où la distance entre l'arc et le tirant est la moitié, l'effort est aussi diminué de moitié:

$$N_{trav.} = \frac{q \cdot \ell^2}{24 \cdot z}$$

Les déformations aussi sont compatibles avec cette nouvelle situation: comme dans la poutre continue avec travées régulières et charge répartie, dans la poutre encastrée aussi, si la



Poutre bi-encastrée, sollicitations sous l'effet d'une charge uniformément répartie (matériau linéaire-élastique, rigidité constante)

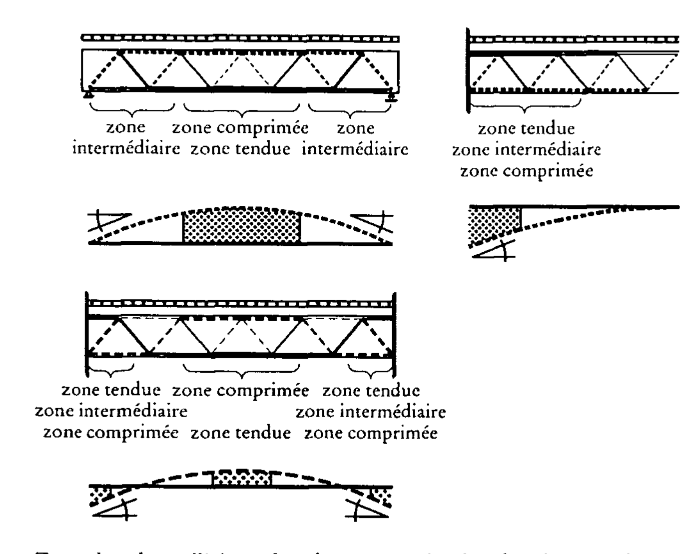


Pont sur la Marne à Luzancy, 1946, Ing. E. Freyssinet
(ℓ = 55 m, hauteur au faîte 1,22 m)

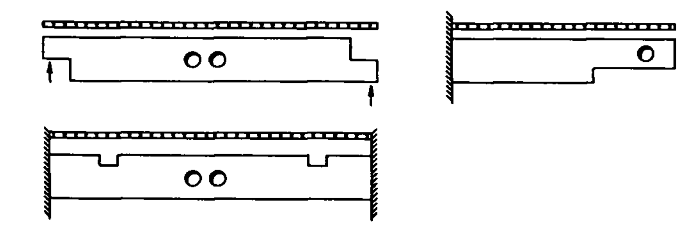
structure de support est très rigide, l'angle de rotation aux extrémités doit être nul.
La figure ci-contre montre un exemple où la hauteur de la poutre suit l'intensité des sollicitations. Comme nous le constatons, la poutre est plus haute à l'encastrement qu'en travée. En effet, dans une poutre de ce type, les sollicitations à l'encastrement sont plus du double de celles dans la travée, comme nous l'avons déduit précédemment. Ceci résulte de la charge permanente qui se concentre à proximité des encastrements, et surtout de la plus grande rigidité de la poutre dans la zone d'encastrement, qui provoque une augmentation des sollicitations à l'encastrement et une diminution dans la travée.

Les zones plus ou moins sollicitées dans les poutres

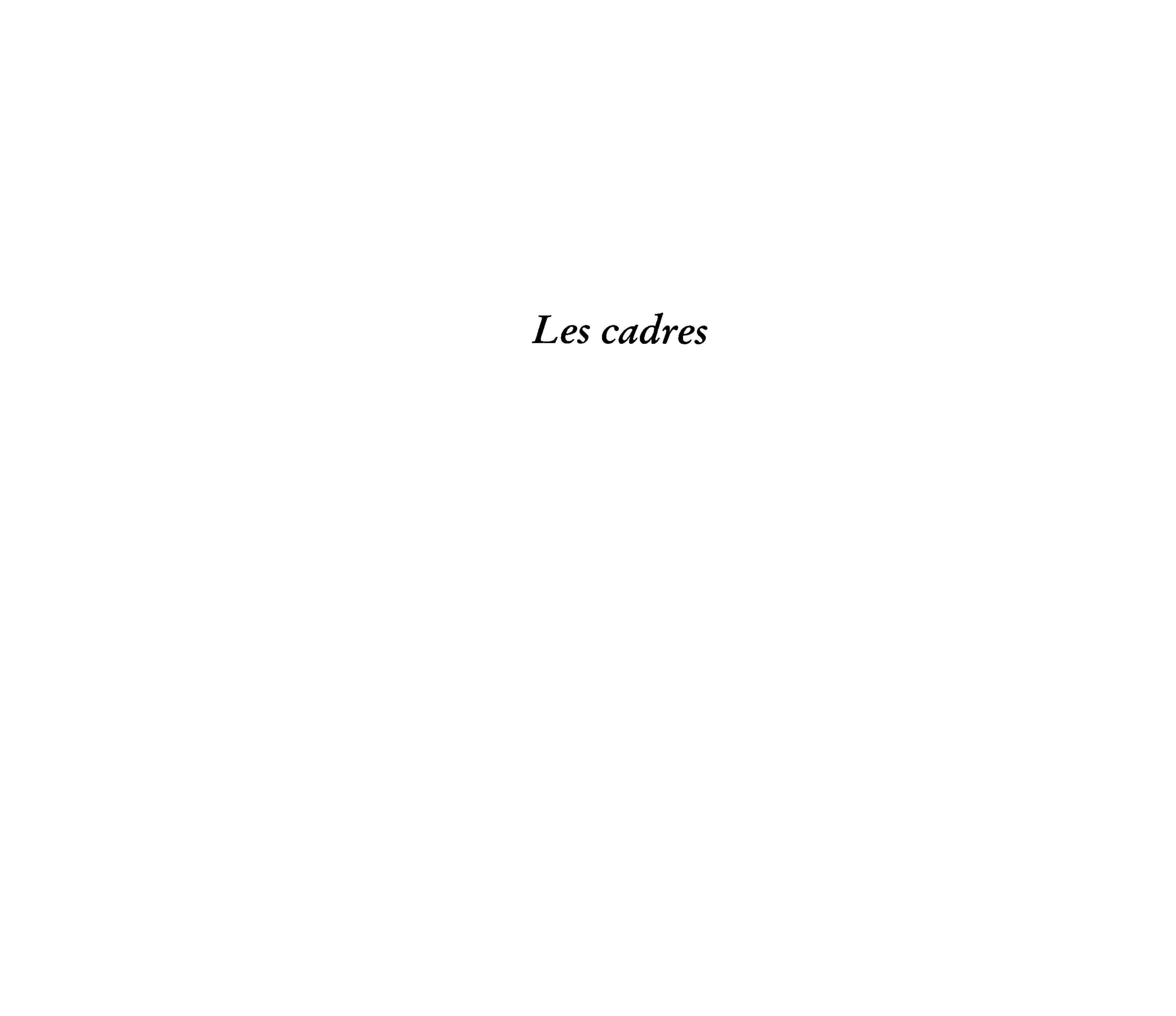
Dans l'analyse des treillis, nous avons décrit comment identifier les barres les plus sollicitées en observant la structure funiculaire à poussée compensée correspondante. La sollicitation des membrures est proportionnelle à la distance entre l'arc et le tirant, alors que la sollicitation des diagonales est plus intense là où l'arc présente la pente la plus grande. Cette approche s'applique évidemment aussi aux poutres.
La figure ci-contre met en évidence les zones les plus sollicitées pour les typologies de poutres les plus communes: poutres simples, consoles et poutres encastrées. Ces trois éléments peuvent d'autre part être considérés comme les composantes des poutres avec consoles, des poutres Gerber, des poutres continues et des cadres.
La connaissance des zones les plus sollicitées est fort utile, soit parce que le dimensionnement devra en tenir compte, soit parce que ces zones doivent être préservées de toute économie de matériau ou de tout affaiblissement. C'est pourquoi il est également utile de connaître les zones les moins sollicitées: d'éventuelles économies ou réductions de section dans ces zones ne causent par de gros inconvénients pour la structure.
Divers exemples représentés ci-contre indiquent les positions les plus avantageuses des économies et des affaiblissements. Il faut considérer que là où une zone, même si elle est seulement légèrement sollicitée, a été partiellement évidée, il faudra de toute façon trouver un flux alternatif des efforts.



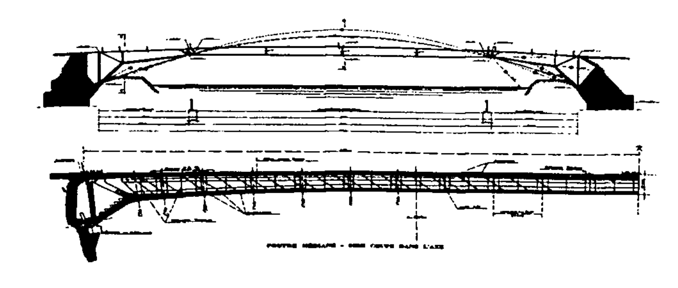
Zones les plus sollicitées dans les poutres simples, dans les consoles et dans les poutres encastrées



Evidements disposés dans les zones les moins sollicitées



Les cadres

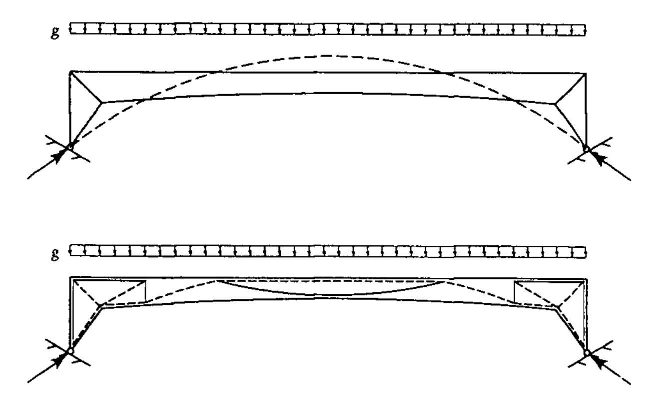


Premier projet pour le pont de St Pierre de Vauvray avec lignes d'action des poussées (cadre à trois articulations) et coupe longitudinale du Pont sur la Marne à Luzancy (cadre à deux articulations), 1946, ing. E. Freyssinet (cf. p. 177)

Dans le pont de Luzancy que nous venons d'analyser, la poutre est encastrée dans deux éléments verticaux très rigides appelés piédroits, qui reposent sur deux appuis fixes. En réalité, si on l'observe globalement, cette structure doit être considérée comme un *cadre* ou un *portique*. Un cadre est défini comme une structure composée d'éléments horizontaux (poutres) et verticaux (colonnes ou piédroits) reliés entre eux de façon monolithique, de façon à obtenir une seule structure.
Leur fonctionnement est identique à celui d'un arc dans lequel la ligne d'action des sollicitations sort de la matière. En d'autres termes, un arc dont la forme dévie sensiblement de celle du polygone funiculaire des charges permanentes est en réalité un cadre (cf. p. 79).

Les cadres à deux articulations

Dans le cas du pont sur la Marne à Luzancy (cf. figure et schémas ci-contre), nous sommes en présence d'un cadre à deux articulations, de sorte que, comme dans le cas des arcs, nous avons un système hyperstatique. Le polygone funiculaire des charges doit passer par les deux articulations à la base de la structure, de sorte que la portée est définie, alors que la flèche est indéterminée. Le schéma ci-contre montre un polygone funiculaire possible sous charges permanentes. En cas d'augmentation de la température, le polygone a tendance à s'abaisser, alors qu'il monte quand la température diminue ou si le terrain de fondation cède légèrement, provoquant l'éloignement des bases des piédroits.
Nous avons déjà vu (cf. p. 157) comment le fonctionnement d'une structure de ce type peut être décrit au moyen de la définition des zones tendues et des zones comprimées. Là où le polygone funiculaire reste à l'intérieur de la structure, il n'y a que des efforts de compression, alors que là où l'arc funiculaire sort du matériau il y a une zone comprimée le long de la surface la plus proche du polygone funiculaire et une zone tendue sur le côté opposé. Nous avons déjà décrit les sollicitations à l'intérieur de la poutre encastrée aux deux extrémités et nous avons déjà analysé les sollicitations de compression et de traction qui s'instaurent dans les piédroits. Dans ce pont, les piédroits ont été conçus de façon à disposer le matériau uniquement là où cela est nécessaire, avec des tirants externes et des éléments comprimés à l'intérieur. Dans la zone d'encastrement, les zones tendues et les zones comprimées qui agissent à l'extrémité de la poutre se lient avec les éléments des piédroits sollicités de la même façon. Puisque les forces ne se trouvent pas sur la même ligne d'action, il en résulte deux forces de déviation qui peuvent être reprises par un élément diagonal comprimé.

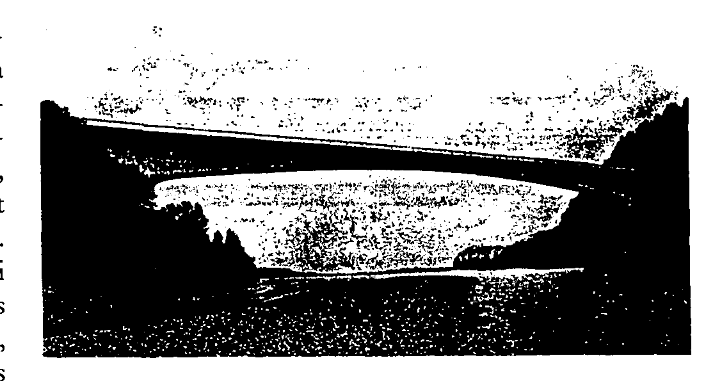


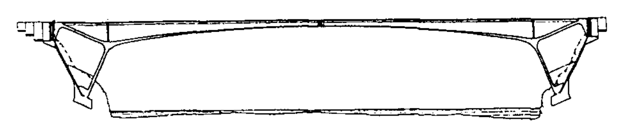
Arc funiculaire et sollicitations internes dans le pont de Luzancy

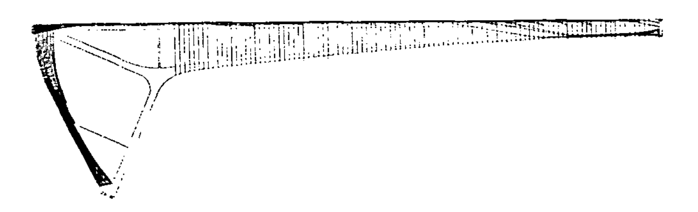
Les cadres à trois articulations

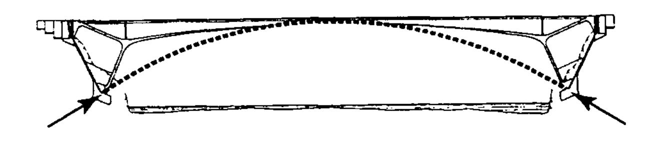
Si nous sommes en présence d'une structure avec trois articulations comme dans l'exemple représenté ci-contre, grâce à l'isostaticité du système, la flèche est définie. La courbe funiculaire doit en effet passer par les trois articulations. Le polygone funiculaire n'est alors influencé que par les charges, alors que des variations de température et un déplacement des appuis n'ont aucune influence sur les sollicitations. Comme dans l'exemple précédent, il s'agit dans ce cas aussi d'un pont en béton armé précontraint. Ceci signifie que les efforts de compression sont repris par les éléments en béton, alors que pour reprendre ceux de traction il faut disposer des câbles de précontrainte en acier à très haute résistance. En effet, comme le montre le schéma ci-contre, le parcours des câbles de précontrainte suit exactement celui des efforts de traction : sur le côté externe des piédroits et sur l'extrados de la poutre.

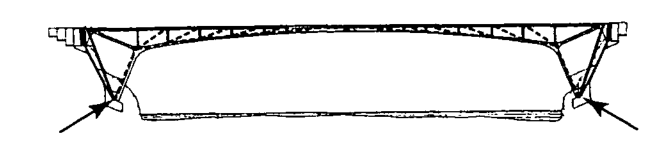
D'autres câbles sont en outre disposés verticalement dans les âmes de la poutre. En effet, le système funiculaire à poussée compensée que nous avons esquissé est, comme nous le savons déjà, une simplification du fonctionnement. Un treillis correspond à une meilleure approximation du système porteur effectif : les câbles verticaux que nous pouvons observer correspondent en réalité aux montants du treillis, nécessaires pour reprendre les efforts correspondants de traction. Dans le treillis, nous avons d'autre part la membrure supérieure, qui est sollicitée dans ce cas à la traction, et la membrure inférieure qui est comprimée. Dans la section effective, celles-ci sont situées dans le tablier du pont et dans la dalle inférieure de la section à caisson. Contrairement au système funiculaire à poussée compensée, les sollicitations des membrures dans le treillis varient sensiblement sur leur longueur. Ceci est également bien visible dans le pont que nous sommes en train d'analyser : les câbles dans le tablier sont concentrés surtout dans la zone d'encastrement, et l'épaisseur de la dalle inférieure en béton varie de quelques centimètres au droit de l'articulation centrale à 100 cm dans la zone d'encastrement où les efforts sont plus importants.





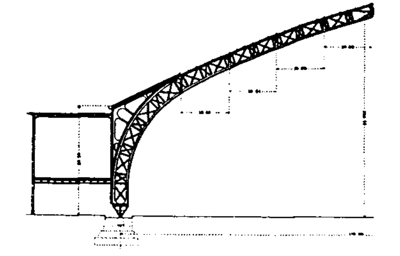




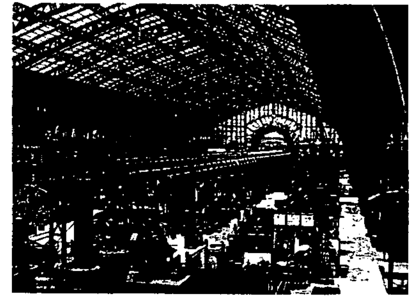


Pont sur le fleuve Tagliamento à Pinzano, 1969, ing. S. Zorzi (cadre à trois articulations, ℓ = 163 m, $h_{travée}$ = 2,50 m, $h_{encastrement}$ = 7,00 m), tracé des câbles de précontrainte et description du fonctionnement au moyen d'un arc et d'un treillis

La forme et la sollicitation







Galerie des Machines à l'Exposition Universelle de 1889 à Paris, arch. F. Dutert, ing. V. Contamin
(ℓ = 115 m, f = 43 m, longueur de la nef 420 m)

La figure ci-contre montre un autre cadre à trois articulations, dans une situation complètement différente. La structure en acier de la célèbre *Galerie des Machines* pour l'Exposition Universelle de Paris de 1889 est constituée d'une série de cadres dans lesquels tous les éléments ont la forme de treillis. La forme dérive surtout de considérations fonctionnelles. Il s'agissait en effet de pouvoir abriter dans cette gigantesque nef les emblèmes de la révolution industrielle, représentés par les grandes machines et par les produits de l'industrie lourde.

Pour évaluer le comportement général de la structure, nous devons aussi considérer les charges variables représentées par le vent, qui ne sont pas négligeables dans une structure relativement légère comme celle-ci. Comme le montre le schéma ci-contre, sous l'effet de cette action, le polygone funiculaire se rapproche de la structure dans le demi-arc sur lequel souffle le vent, alors qu'il s'éloigne du demi-arc sous le vent. Ce sont donc les éléments sous le vent qui sont les éléments les plus sollicités, soit parce que l'effort de compression y est plus grand, soit parce que le polygone funiculaire des charges y est encore plus excentrique.

demi-arc sous le vent
demi-arc au vent
q
compression
traction
g
q

Galerie des Machines: polygones funiculaires correspondant aux charges permanentes, à la poussée du vent et à la superposition des deux actions

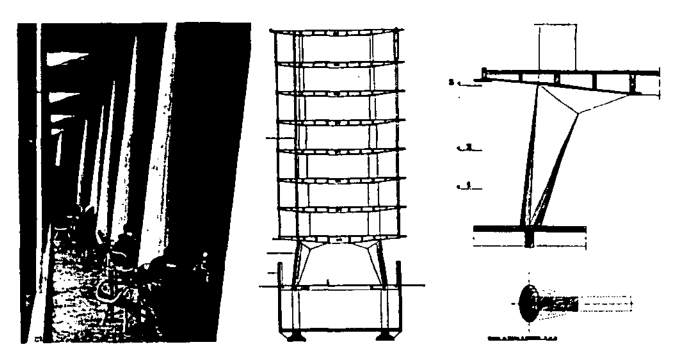
La structure représentée ci-contre est un bon exemple de forme adaptée aussi bien à la reprise des charges permanentes qu'à celle des charges variables prépondérantes. Le principe est semblable à celui de la *Tour Eiffel*: l'inclinaison des piédroits est choisie de façon à garantir une reprise idéale des efforts horizontaux générés par le vent qui souffle sur le bâtiment, ou par les forces d'inertie causées par un mouvement sismique. Si la résultante des poussées horizontales agit approximativement sur le centre de gravité du bâtiment, il se produit en effet des efforts de compression et de traction qui, s'ajoutant à la compression due aux charges permanentes, génèrent deux bielles de compression qui restent à l'intérieur des sections des piédroits. Malgré sa forme, la structure peut donc être considérée, du point de vue strictement structural, comme un arc.

La situation est différente si la poussée horizontale agit à un niveau inférieur, comme ci-contre. Il se produit en effet des efforts de traction qui doivent être repris par une armature métallique. On peut observer que les dimensions des sections des piédroits varient de façon à s'adapter au mieux à cette action également.

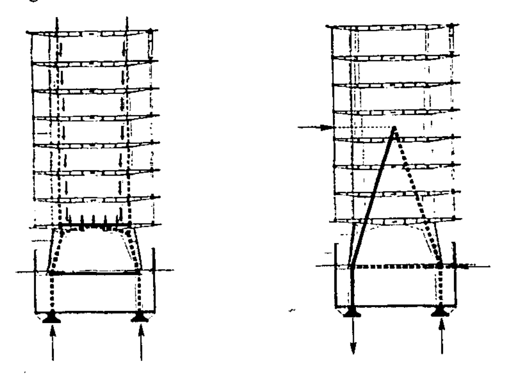
Comme nous le verrons par la suite, dans la partie supérieure du bâtiment également, où les piédroits sont verticaux, nous avons une structure qui réagit aux poussées horizontales comme un cadre avec des polygones funiculaires très excentriques.

Analysons maintenant un autre exemple dans lequel la structure joue surtout le rôle d'élément stabilisateur, en mesure de reprendre les poussées transversales. La structure métallique de la source Cachat à Evian, projetée par Jean Prouvé, remplit cette fonction de façon optimale. Elle représente une alternative intéressante si on ne veut pas encastrer la structure dans la base et si on souhaite éviter les éléments diagonaux, typiques d'un contreventement à treillis.

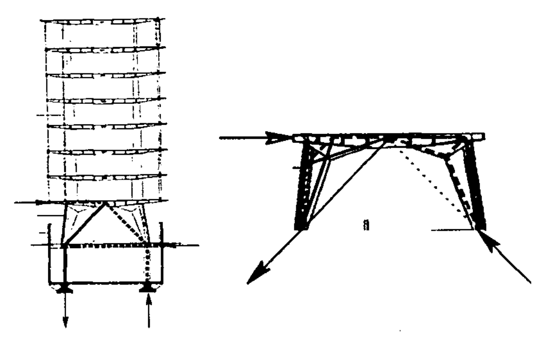
Dans ce cas, nous avons un cadre asymétrique à trois articulations. Un élément est parfaitement aligné sur la résultante qui passe par l'articulation à la base et par l'articulation au sommet, de sorte qu'il ne reprend que des efforts centrés de traction, ou de compression quand le vent souffle dans le sens inverse. Dans l'autre élément se produisent en revanche des excentricités importantes, et cette situation est mise en évidence par ses dimensions généreuses.



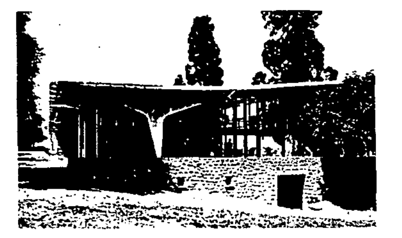
Siège de l'UNESCO à Paris, 1952, arch. M. Breuer et B. Zehrfuss, ing. P.L. Nervi



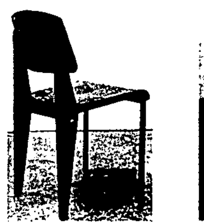
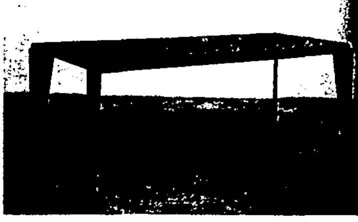
Siège de l'UNESCO: transmission des efforts générés par les charges permanentes et par le vent



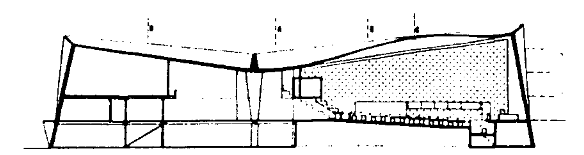
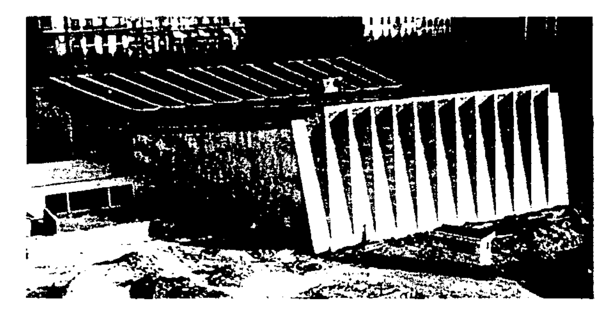
Siège de l'UNESCO: transmission des efforts générés par une force horizontale agissant au niveau du premier étage



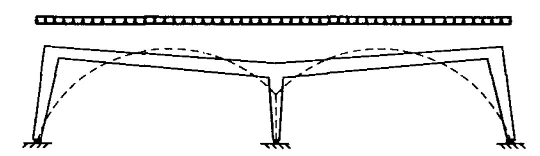
Buvette de la source Cachat à Evian, 1956, arch. M. Novarina, J. Prouvé constructeur

Meubles en tôle pliée, 1951, J. Prouvé

Salle de conférences du complexe de l'UNESCO à Paris, 1952, arch. M. Breuer et B. Zehrfuss, ing. P.L. Nervi



Salle de conférences du complexe de l'UNESCO avec polygone funiculaire des charges

Observons que de nombreux objets familiers peuvent être considérés comme des cadres du point de vue structural. Les photos ci-contre montrent divers meubles construits par Jean Prouvé en pliant une tôle laminée de métal. Ces meubles sont tous caractérisés par une adaptation de la forme aux exigences structurales.

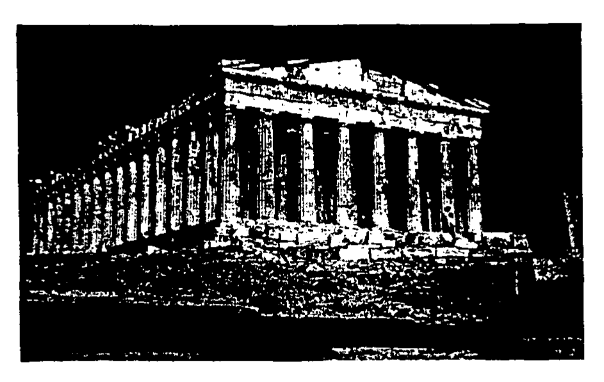
Les cadres à travées multiples

Examinons maintenant une structure composée de deux cadres disposés l'un à côté de l'autre, avec un piédroit commun. Comme le montre le polygone funiculaire des charges permanentes, l'excentricité maximale dans les piédroits se rencontre dans la partie supérieure, de sorte que dans ces zones une hauteur statique plus grande a été choisie. Avec une surface plissée, bien que la structure soit relativement légère, on obtient une grande hauteur statique, mesurée entre la partie tendue et la partie comprimée. Sur la toiture, la structure plissée a été renforcée par une dalle qui ondule en suivant les zones comprimées de façon à améliorer l'efficacité structurale et à disposer, dans la position la mieux adaptée, le béton nécessaire pour reprendre les efforts de compression.

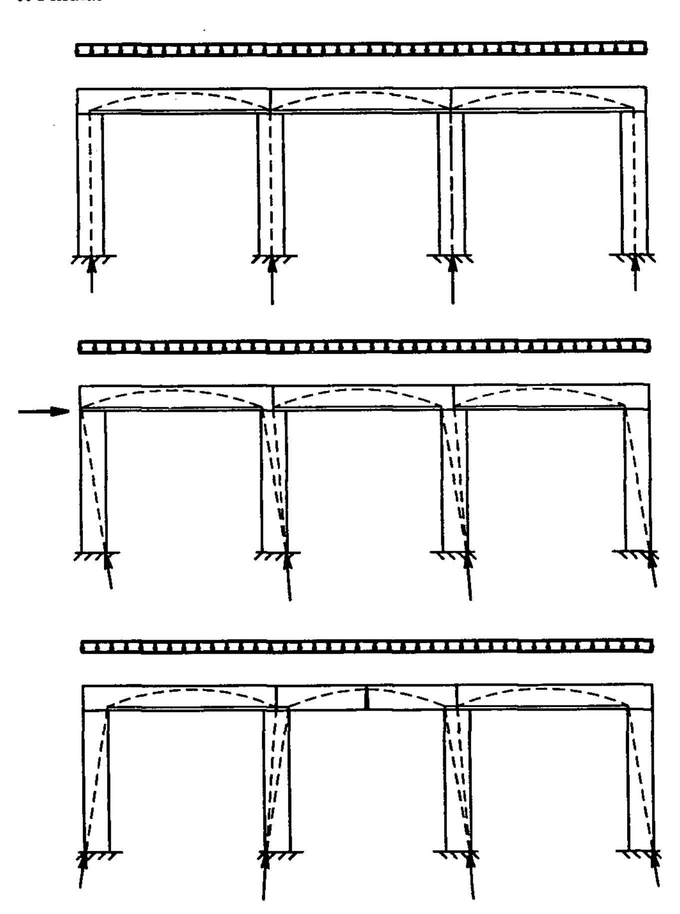
Le Parthénon aussi, comme tous les temples grecs, peut être considéré comme un cadre du point de vue structural. Sous l'influence des charges permanentes, le fonctionnement est très simple. L'architrave est constituée d'une série de blocs en marbre qui se comportent comme des poutres soutenues par les pilastres à leurs extrémités. Ces blocs sont donc sollicités aussi bien à la compression qu'à la traction. Ils sont relativement trapus, de façon à réduire l'intensité des sollicitations et à pallier la basse résistance du matériau s'il est sollicité à la traction. Ce fonctionnement, simple mais relativement peu efficace, dérive du fait que les divers blocs qui composent la structure ne peuvent se transmettre réciproquement que des efforts de compression par contact. Une structure monolithique analogue présenterait un fonctionnement plus complexe, semblable à celui que nous venons de décrire pour la salle de conférences du complexe de l'UNESCO à Paris.

Sous l'influence des poussées horizontales générées par le vent et surtout par les accélérations sismiques, le comportement de la structure se rapproche de celui d'un cadre. La résultante des efforts à l'intérieur des colonnes peut s'incliner et s'opposer à la poussée externe par sa composante horizontale. La stabilité est garantie tant que la résultante reste à l'intérieur de la section. Il faut observer que dans les temples grecs, les structures internes, souvent très massives, ne collaborent généralement pas avec les colonnades, dans la mesure où la liaison entre ces structures est assurée par les éléments en bois de la toiture peu résistants et trop peu rigides.

Bien que les architraves soient relativement peu sollicitées, certains éléments se sont fissurés au cours du temps et les structures, curieusement, ne se sont pas écroulées. Ceci s'explique par le fait que l'élément fissuré peut encore fonctionner comme un arc qui est en mesure de transmettre au terrain sa poussée grâce à l'inclinaison de la compression dans les colonnes.



Parthénon à Athènes, Grèce, env. 477-438 av. J.C., Ictinos, Callicrates et Phidias

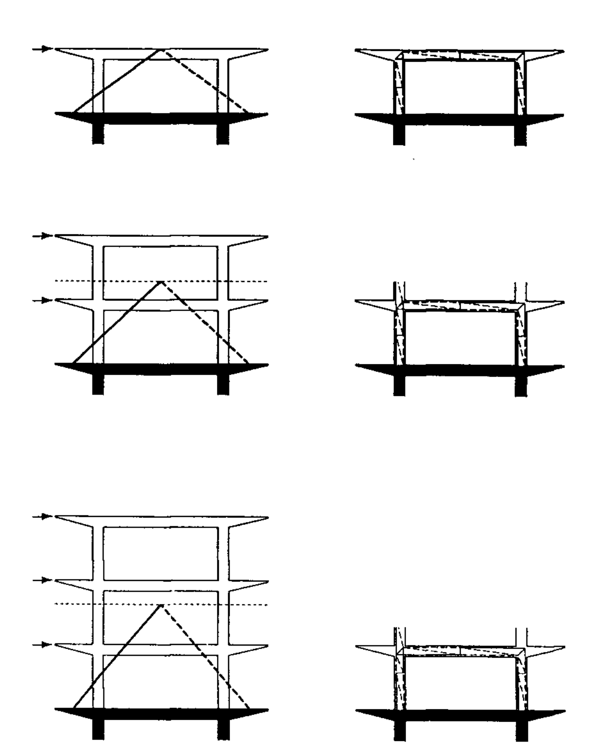


Comportement de la colonnade d'un temple grec sous l'influence des charges permanentes et avec la poussée horizontale du vent ou d'un séisme et des charges permanentes en cas d'architrave fissurée

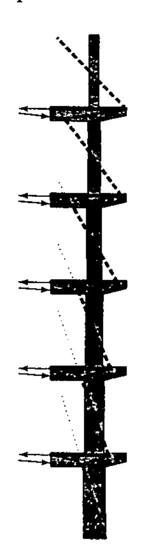
Les cadres superposés

Revenons maintenant à l'étude de la partie supérieure du bâtiment de l'UNESCO à Paris, en nous concentrant sur son fonctionnement en présence de charges horizontales provoquées par le vent. La structure est composée d'une série de cadres à piédroits verticaux superposés. Si nous commençons notre étude par l'élément au dernier étage, nous avons un cadre simple sans aucune articulation. Le schéma ci-contre propose une solution possible avec les résultantes de la zone comprimée sous le vent et de la zone tendue au vent, ainsi que les sollicitations reportées dans les sections. La même construction peut être dessinée pour les cadres des étages inférieurs, tous caractérisés par le même schéma structural.

Nous pouvons aussi interpréter la structure comme la composition de deux gros piliers, constitués par les piédroits des cadres et sollicités par les actions des poutres de liaison. En effet les poutres, avec leurs efforts de traction et de compression exercés transversalement (moments d'encastrement), permettent de limiter les excentricités des efforts dans les piliers, augmentant ainsi sensiblement leur efficacité structurale.



Siège de l'UNESCO à Paris, sollicitations des cadres aux étages supérieurs

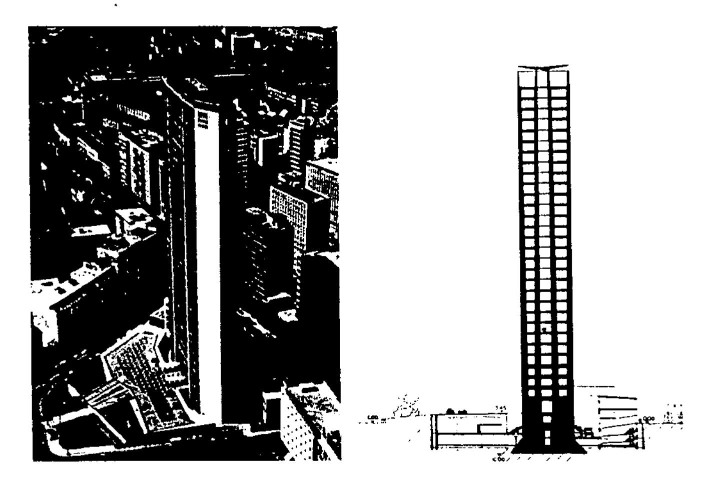


Siège de l'UNESCO à Paris, sollicitations dans les piliers sous le vent

Les cadres à étages et à travées multiples

Le même principe a été adopté dans le gratte-ciel Pirelli à Milan. Dans ce cas aussi, les piliers sont reliés entre eux par des poutres horizontales qui ont la fonction de diminuer les excentricités des efforts dans les éléments verticaux. Tant pour les piliers que pour les poutres de liaison, les dimensions ont été choisies de façon à limiter les efforts de traction qui doivent être repris par l'armature métallique.

Cette solution structurale est fréquemment utilisée dans la construction des bâtiments d'une certaine hauteur, aussi bien métalliques qu'en béton armé. On dispose souvent une structure en cadre sur le périmètre, à laquelle s'ajoute une structure en treillis plus rigide, disposée dans la partie centrale de l'édifice. Les deux éléments de la structure reprennent chacun une partie des charges horizontales, de façon proportionnelle à leur rigidité. Une solution de ce type est représentée à la p. 144 en bas.



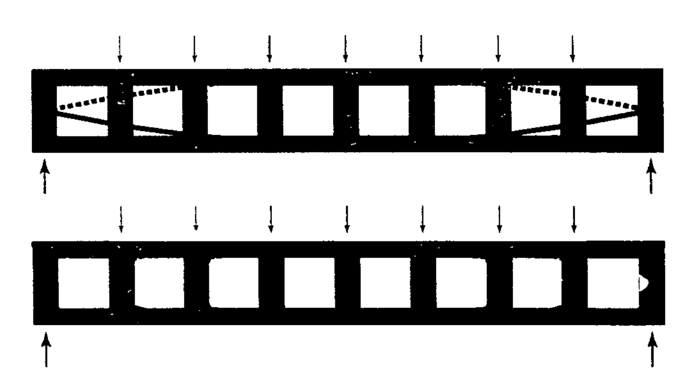
Gratte-ciel Pirelli à Milan, 1956, arch. G. Ponti, A. Fornaroli, A. Rosselli, G. Valtolina, E. Dall'Orto, ing. P.L. Nervi

Les poutres Vierendeel



De la même façon qu'une série de cadres sur plusieurs étages est en mesure de reprendre des poussées horizontales, une structure analogue, disposée dans le sens horizontal pour former une poutraison, est en mesure de reprendre des charges verticales. C'est le principe des *poutres Vierendeel*, appelées ainsi en souvenir de l'ingénieur belge qui les inventa vers la fin du XIX[e] siècle. Ces poutres, semblables à des treillis en N sans diagonales, présentent en réalité des sollicitations bien plus complexes et beaucoup plus intenses. A l'intérieur des divers éléments se produisent en effet des efforts de traction et de compression, avec des excentricités importantes. Il faut noter que ces structures, pour pouvoir fonctionner correctement, doivent avoir des montants encastrés dans les membrures, au contraire des treillis.

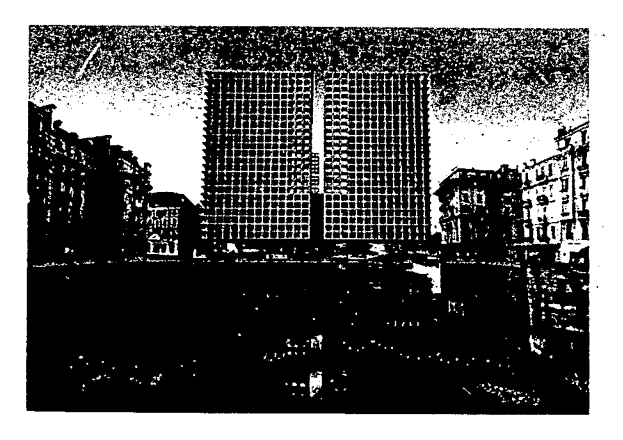
Comme le montre le schéma ci-contre, un effort de compression incliné par rapport à l'élément se produit dans la membrure supérieure d'une poutre simple. Les efforts exercés par les montants dévient la compression de la membrure, de façon similaire à ce qui se passe dans les piliers d'une structure à cadres superposés.



Efforts dans les éléments d'une poutre Vierendeel (compression dans la membrure supérieure et traction dans la membrure inférieure, avec les excentricités relatives



Villa à Jona (CH), 1999, arch. V. Bearth, A. Deplazes et D. Ladner, ing. J. Buchli

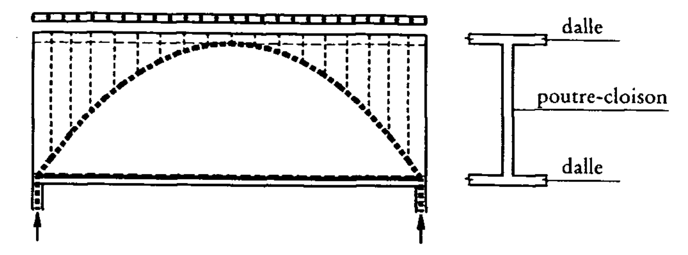


Projet pour la nouvelle Mairie de Nice, 2000, arch. L. Vacchini et S. Gmür, ing. A. Muttoni

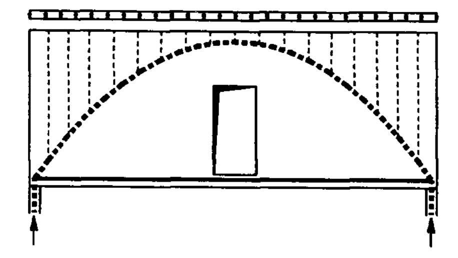
Malgré leur efficacité structurale plus faible que celle des treillis, les poutres Vierendeel sont souvent utilisées en architecture, dans la mesure où les ouvertures rectangulaires entre les membrures et les montants s'adaptent bien à la disposition de portes et fenêtres.

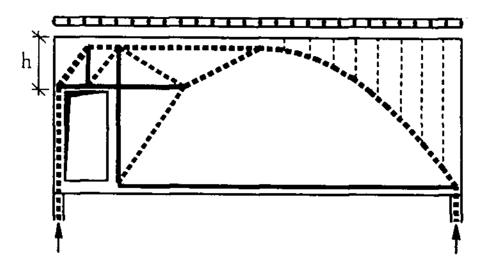
Evidemment, les poutres Vierendeel peuvent elles aussi être disposées l'une au-dessus de l'autre, de façon à en augmenter l'efficacité structurale. Dans l'exemple représenté ci-dessous, la façade porteuse est soutenue par des piliers dans la zone centrale, de sorte qu'on obtient deux grandes consoles en porte-à-faux. Bien que les charges et des dimensions soient importantes, la répartition des efforts sur plusieurs étages et l'importante hauteur effective permettent de limiter les sollicitations.

Les poutres-cloisons et les voiles

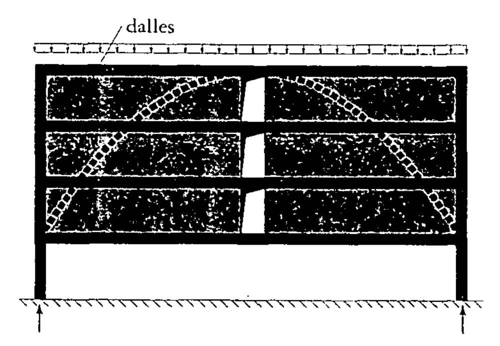


Système porteur dans une poutre-cloison avec un élancement < 3


Position structuralement optimale d'un percement



Système porteur dans une poutre-cloison avec percements à proximité des appuis



Voile sur plusieurs étages pour couvrir une grande portée au rez-de-chaussée

Les poutres-cloisons

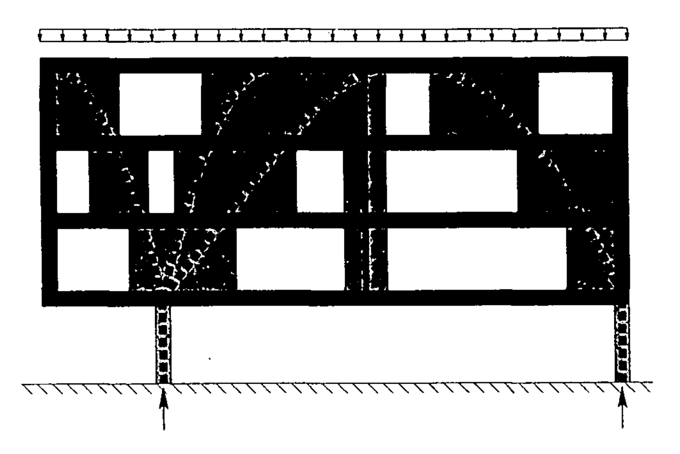
Si une poutre occupe toute la hauteur d'un étage on parle de *poutre-cloison*. De telles poutres sont généralement caractérisées par un élancement fort limité. Si le rapport entre la portée et la hauteur est inférieur à environ trois, et si les appuis se trouvent sur le bord inférieur, le système porteur est celui d'un arc avec tirant, et il ne se forme pas à l'intérieur de la paroi de véritables diagonales tendues et comprimées, comme c'est le cas dans les poutres plus élancées.
Les poutres-cloisons comportent souvent des ouvertures pour portes et fenêtres. Du point de vue structural, la position plus avantageuse pour ces ouvertures est sûrement la position centrale, où se trouve une vaste zone non sollicitée entre l'arc et le tirant.
Une ouverture à proximité des appuis coupe en revanche l'arc en compression, de sorte qu'il faudra trouver un système porteur alternatif. Il est donc indispensable de prévoir une zone suffisamment résistante au-dessus d'une porte ou en-dessous d'une fenêtre. Cet élément sera sollicité comme une console renversée, chargée par la force transmise par l'appui.

Les voiles sur plusieurs étages

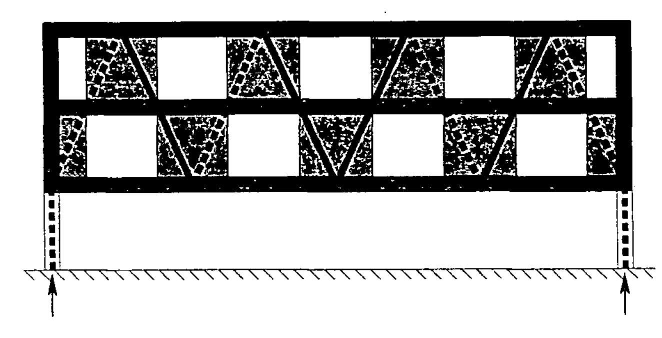
Si les poutres-cloisons s'étendent sur plusieurs étages, la structure devient encore plus efficace. Dans ce cas, on parle de voiles, utilisant un terme qui est employé pour des structures planes, généralement en béton armé, sur lesquelles les charges, les forces transmises par les appuis et les efforts internes agissent tous dans le plan de l'élément. Leur efficacité dérive de leur grande hauteur effective qui rend possible la reprise de charges importantes sur de très grandes portées (cf. p. 168 et 169). Les voiles qui soutiennent les bâtiments sont souvent liés de façon monolithique aux éléments horizontaux de la construction, généralement formés de dalles en béton armé. Celles-ci peuvent ainsi contribuer à la reprise des efforts de compression ou de traction dans le sens horizontal.
Dans l'exemple représenté ci-contre, des arcs se forment à l'intérieur du voile, alors que le tirant peut s'établir dans la première dalle. Cette solution, particulièrement efficace, est souvent utilisée quand on souhaite limiter au minimum les éléments au rez-de-chaussée, de façon à couvrir des portées très importantes. Evidemment, les rares piliers restants doivent être dimensionnés de façon à reprendre toutes les charges, alors qu'un système de contreventement adéquat inséré également au rez-de-chaussée doit transmettre au terrain les poussées horizontales générées par le vent et les effets sismiques.

Dans l'exemple ci-contre, caractérisé par une portée principale avec une console, on a considéré une combinaison d'arcs et de tirants. Comme dans la poutre avec porte-à-faux (cf. p. 145), on a un tirant supérieur dans la zone influencée par la console, et un tirant inférieur dans la partie restante. Il faut observer que dans la conception et le dimensionnement du voile, il faut considérer la combinaison des charges les plus défavorables. En d'autres termes, il ne faut pas seulement établir l'arc funiculaire des charges permanentes, mais il faut aussi considérer sa déviation possible causée par les charges variables. Dans les bâtiments en béton armé, les charges permanentes sont presque toujours prépondérantes, de sorte que le déplacement du polygone funiculaire est généralement faible.

Si la structure ou les charges ne sont pas symétriques, la réduction du voile, selon le fonctionnement de la structure funiculaire à poussée compensée, conduit souvent à une géométrie complexe. Une solution alternative, beaucoup plus ordonnée, utilisable aussi pour une façade, est obtenue en suivant les efforts qui peuvent s'établir dans un treillis. On obtient une structure très efficace en disposant les éléments de voile selon le schéma d'un treillis en V ou en X, comme l'indique le schéma ci-contre. Si la structure présente une certaine hauteur et si les ouvertures sont relativement petites, on peut superposer deux systèmes ou plus, de façon à obtenir le fonctionnement d'un treillis en X à diagonales multiples.



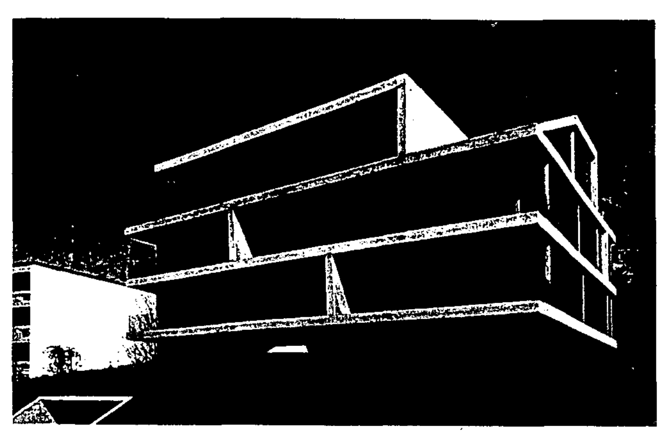
Structure avec porte-à-faux, réduction au minimum des éléments du voile



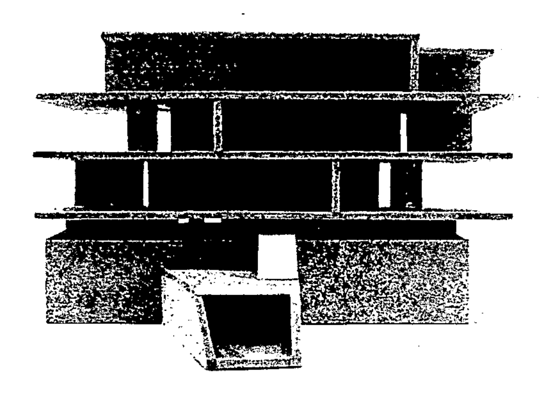
Voile percé dans lequel peut être inscrit un treillis en V

Les voiles dans l'espace

Du point de vue structural, on peut composer des voiles en béton armé dans l'espace, avec une grande liberté. Ce principe est mis en évidence dans l'exemple ci-contre, où les voiles disposés l'un au-dessus de l'autre se croisent.
Un système de voiles verticaux et horizontaux (murs et dalles) en béton armé est très efficace, puisque les efforts peuvent être transmis d'un élément à l'autre, soit par contact, soit en disposant des tirants.



Maison Kerez à Zurich, 2003, arch. C. Kerez, ing. J. Schwartz

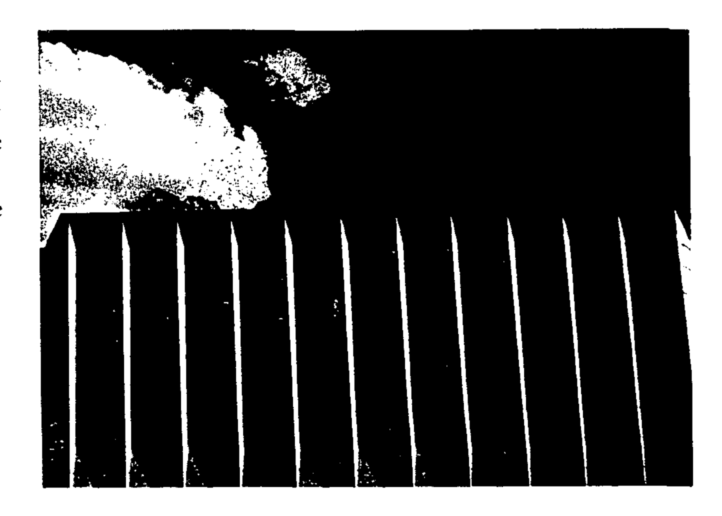


Maquette d'étude de la maison Kerez. Les murs et les dalles en béton armé forment une structure monolitique

Les structures plissées

Du point de vue structural, les structures plissées que nous avons déjà vues dans les cas des voûtes et des cadres, ou encore des poutres à section en I ou à section à caisson, peuvent être considérées comme un ensemble de voiles liés de façon monolithique.

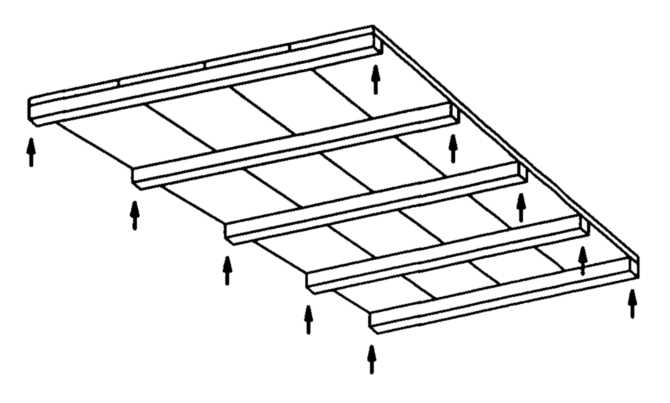
Nous voyons ci-contre un exemple intéressant, dans lequel le béton armé est employé de façon efficace.



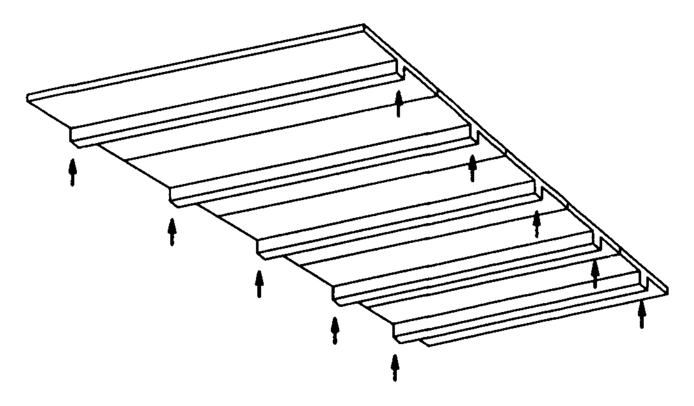
Siège de l'UNESCO à Paris, 1952, arch. M. Breuer et B. Zehrfuss, ing. P.L. Nervi

Les planchers nervurés, les grilles de poutres et les dalles

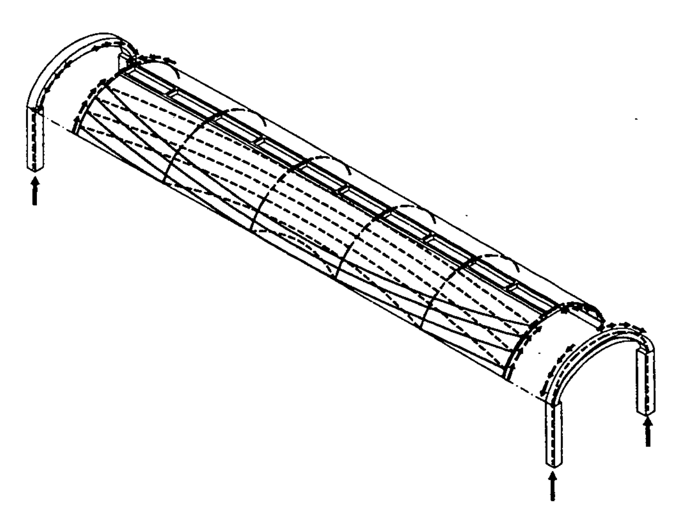
La composition de poutres pour soutenir une surface plane



Poutres parallèles et structure secondaire dans le sens transversal



Poutres en T avec une aile large qui joue aussi le rôle d'élément secondaire dans le sens transversal: dalles nervurées



Fonctionnement comme poutre de la coque cylindrique du Kimbell Art Museum (cf. p. 104)

La façon la plus simple pour porter une surface plane, comme une toiture ou un plancher, consiste à disposer une série de poutres parallèles sur lesquelles sont posés des éléments secondaires en mesure de reprendre les charges et de les transmettre aux poutres. Ce principe structural est celui des planchers en bois (poutres et planches en bois), des structures mixtes béton-hourdis (poutrelles en béton armé qui soutiennent des éléments en terre cuite), et des structures mixtes acier-béton (poutres métalliques, généralement à section en I, sur lesquelles est posée une dalle en béton armé). L'alternative consiste à disposer les poutres l'une à côté de l'autre, de façon à se passer de la structure secondaire.
Dans ce cas, il est opportun de choisir la section de la poutre suffisamment large, de façon à limiter le nombre d'éléments porteurs. Les sections en T sont particulièrement efficaces, avec une aile supérieure très large qui exerce une double fonction: elle reprend les charges qui la sollicitent dans le sens transversal et elle joue le rôle de zone comprimée de la poutre dans le sens longitudinal. Si les poutres sont liées de façon à former une structure unique monolithique, nous obtenons une dalle nervurée.
Les coques cylindriques ont également un fonctionnement similaire, comme celles du Kimbell Art Museum représentées à la page 104. Dans ce cas, nous avons un fonctionnement de poutre dans le sens longitudinal, avec la zone tendue située le long des bords inférieurs et la zone comprimée le long du faîte de la coque. Le schéma ci-contre montre le fonctionnement comme poutre avec plusieurs structures funiculaires à poussée compensée superposées. Dans le sens transversal, la coque fonctionne en revanche comme une voûte qui transmet la poussée au système longitudinal. Aux deux extrémités, la force ne peut pas être transmise directement aux appuis. En effet, les structures funiculaires à poussée compensée ne se trouvent pas dans des plans verticaux et transmettent par conséquent aux appuis des efforts avec une composante transversale. Il en résulte donc la nécessité d'avoir un diaphragme terminal, en mesure de reprendre cette composante des efforts et de transférer la composante verticale aux appuis. Il faut observer que dans le cas du Kimbell Art Museum, ces diaphragmes placés aux extrémités, bien qu'ils aient une forme arquée, fonctionnent comme des poutres en raison de l'absence d'un élément en mesure de reprendre une poussée transversale sur les appuis.

Les grilles de poutres

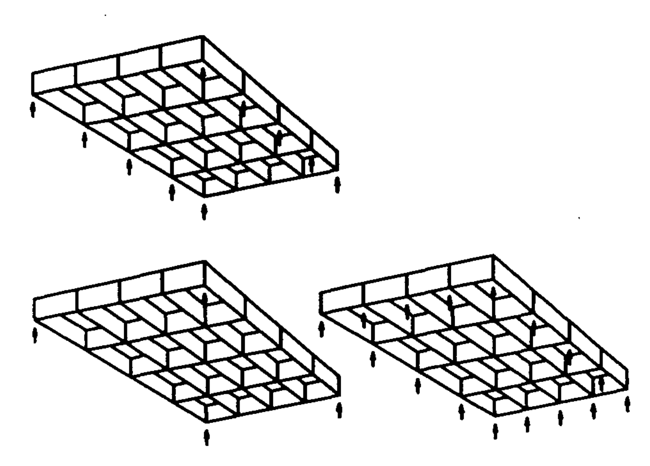
Si l'on dispose deux séries de poutres perpendiculaires entre elles, comme nous l'avons fait avec les treillis, nous obtenons une structure spatiale. L'avantage de ces structures, appelées *grilles de poutres*, consiste en la possibilité de disposer les appuis avec une extrême liberté. Nous pouvons imaginer une toiture à plan rectangulaire avec les appuis disposés sur deux côtés; dans ce cas les poutres qui ne s'appuient pas directement jouent uniquement le rôle d'éléments de répartition et le fonctionnement de la structure est fort semblable à celui des dalles nervurées.

Nous pouvons aussi appuyer toutes les poutres sur quatre côtés, de façon à reprendre une partie de la charge par une série de poutres dans une direction et à transmettre la charge restante aux appuis par l'autre série de poutres.

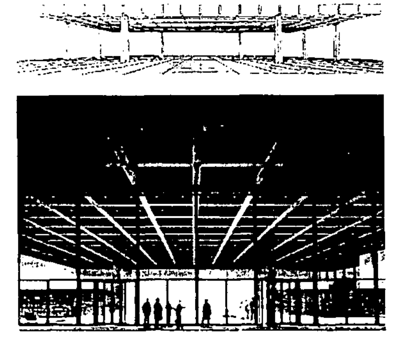
Il est aussi possible de réduire radicalement le nombre d'appuis, en les disposant par exemple aux quatre coins. Dans ce cas, on exploite la capacité de transmettre les charges dans les deux directions, exactement comme la tour dans le jeu d'échecs qui peut se déplacer dans les deux sens de l'échiquier et peut ainsi revenir aux coins en partant du centre. Comme dans cette analogie, selon laquelle la tour peut rejoindre le coin en suivant de nombreuses combinaisons possibles de coups, dans le cas des grilles de poutres également, la charge peut être transmise selon divers cheminements, plus ou moins directs. Dans les grilles de poutres reposant sur peu d'appuis, on a une forte augmentation des sollicitations dans les poutres qui composent la grille elle-même.

Dans les deux exemples représentés ci-contre, huit colonnes soutiennent une grande grille de poutres métalliques.

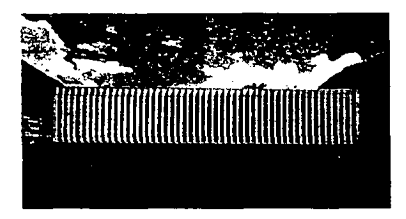
Dans l'autre exemple ci-dessous, la grille, appuyée sur tout le périmètre, est composée de poutres en béton armé. Celles-ci présentent des sections en T dans lesquelles les ailes sont suffisamment larges pour se juxtaposer et former une surface continue.

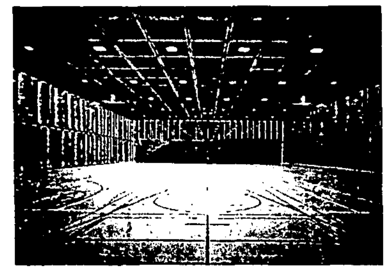


Grilles de poutres avec appuis disposés sur 2 côtés, sur 4 côtés et aux 4 angles



Projet pour le Bacardi Office Building à Santiago de Cuba, 1957, arch. L. Mies van der Rohe et Nationalgalerie à Berlin, 1968, arch. L. Mies van der Rohe, ing. H. Dienst (grille constituée de poutres en I: 64,80 × 64,80 m, h = 1,83 m)

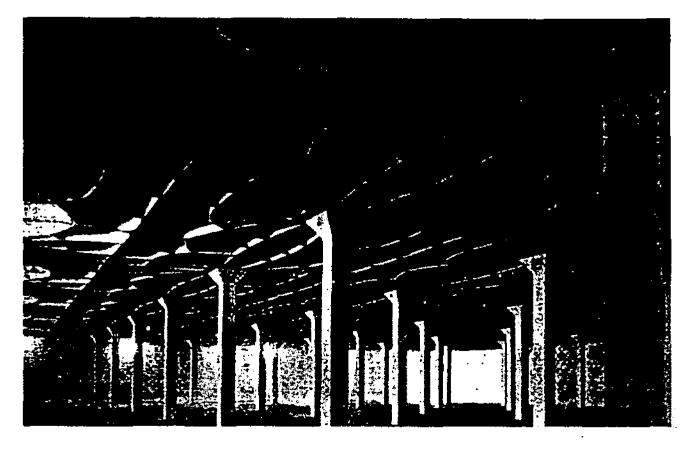




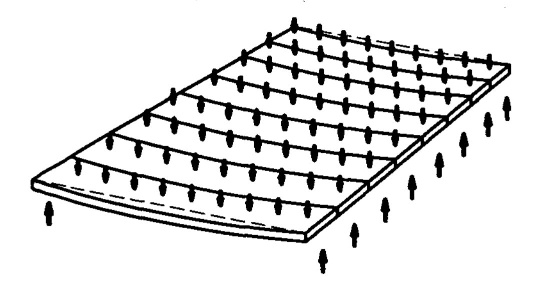
Salle polyvalente à Losone, 1997, arch. L. Vacchini, ing. R. Rossi



Yale University Art Gallery, New Haven, Connecticut, 1953, arch. L. I. Kahn



Plancher à nervures pour filature de laine Gatti à Rome, 1951, ing. P. L. Nervi



Dalle rectangulaire appuyée sur deux côtés et soumise à une charge uniformément répartie

Dans les deux exemples ci-contre, les poutres sont également composées d'une aile supérieure, qui fait partie d'une dalle continue, et de nervures verticales. Dans le premier cas, ce sont trois séries de poutres qui forment une grille triangulaire. Dans le deuxième cas, par contre, les nervures suivent un tracé curviligne, de façon à transmettre les charges selon la voie la plus directe en convergeant radialement vers les appuis. Les nervures qui entourent la colonne d'appui ont en revanche pour fonction de répartir les charges et de reprendre les forces de déviation des nervures radiales là où elles sont incurvées.

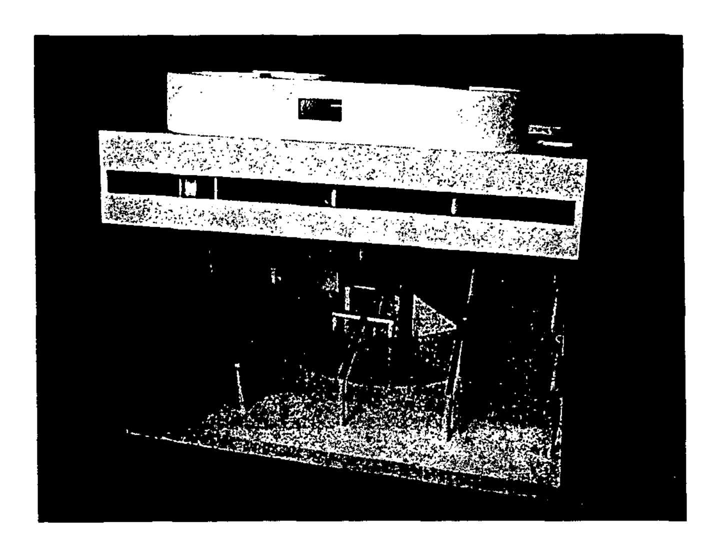
Les dalles

L'introduction du béton armé a rendu possible la construction d'éléments monolithiques appelés *dalles*, décidant ainsi du succès de ce système stuctural devenu le plus employé en architecture. Le fonctionnement structural des dalles est facilement compréhensible si on imagine qu'à l'intérieur de leur masse peuvent s'établir des poutres et des grilles de poutres en mesure de reprendre les charges et de les transmettre aux appuis. Pour mieux comprendre cette analogie, nous considérerons diverses dalles rectangulaires avec divers modes de chargement et d'appui.

Les dalles soutenues par des murs avec transmission des charges dans une direction

Examinons en premier lieu une dalle sollicitée par une charge uniformément répartie sur toute la surface et soutenue sur deux bords opposés, par exemple par deux murs. Nous pouvons découper la dalle de façon à obtenir une série de bandes fonctionnant comme des poutres. Si nous les observons attentivement, nous constatons qu'elles se déforment toutes de la même manière et qu'il n'y a aucune interaction entre une poutre et l'autre; toute la dalle se comporte de la même façon. Les dalles en béton armé qui constituent les structures horizontales en architecture sont généralement soumises à des charges permanentes uniformément réparties sur leur surface. Les charges utiles également, dont l'intensité est habituellement bien plus faible que celle des charges permanentes, sont généralement idéalisées comme des charges uniformes aussi bien dans le projet que dans le dimensionnement de la structure. Les actions exercées par des murs ou des colonnes, si le système vertical est discontinu sur la hauteur de la construction, font exception. Dans ces cas, les dalles sont sollicitées par des charges ponctuelles, au droit des colonnes, ou par des charges distribuées le long d'une ligne, au droit des murs.

Les dalles sont souvent appuyées sur des poutres ou des grilles de poutres beaucoup plus rigides que la dalle de par leur hauteur plus importante. Le fonctionnement et le comportement de ces dalles est pratiquement identique à celui des dalles appuyées sur des murs. Si les poutres sont parallèles et si les actions déterminantes sont uniformément réparties sur la surface, on obtient également une transmission des charges dans une seule direction.
La figure ci-contre montre un des exemples les plus connus en architecture. Dans la *Villa Savoye* de Le Corbusier, une fois éliminés tous les éléments non porteurs, il reste un système de poutres parallèles soutenues par des colonnes. Les charges sont d'abord reprises par des dalles évidées qui les transmettent directement aux poutres, selon la voie la plus directe.



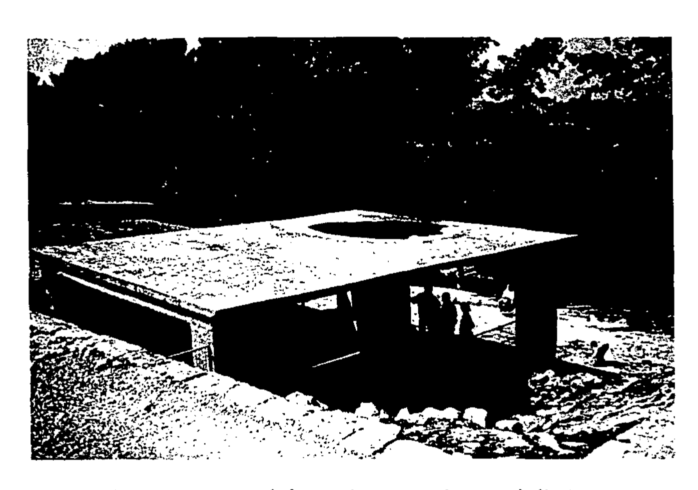
Villa Savoye à Poissy, 1930, arch. Le Corbusier et P. Jeanneret, maquette du système porteur

Le choix de l'épaisseur d'une dalle

Le choix de l'épaisseur d'une dalle est un problème typique de dimensionnement qui doit souvent être abordé déjà dans une des phases initiales du projet. Du point de vue structural, comme on l'a vu précédemment, toute structure doit être dimensionnée de façon à satisfaire les deux critères définis comme

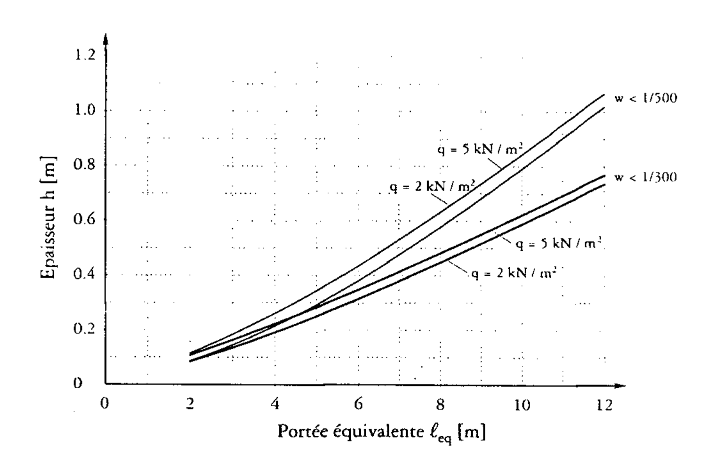
- critère de l'état limite ultime (ELU, la structure ne doit en aucun cas se rompre) et
- critère de l'état limite de service (ELS, la fonctionnalité doit être garantie durant l'usage de la construction).

Il faut noter que ces critères étaient déjà connus dans l'Antiquité. Selon Vitruve, la *firmitas* [la solidité] et l'*utilitas* [la fonctionnalité] représentaient avec la *venustas* [la beauté] les qualités principales d'une construction.
Dans le cas du choix de l'épaisseur des dalles en béton armé, c'est presque toujours le critère de l'état limite de service qui est déterminant. L'épaisseur doit être suffisante pour limiter les déformations des structures sous l'effet des charges utiles mais aussi des charges permanentes, dans la mesure où le matériau a un comportement visqueux. Des déformations trop importantes peuvent en effet causer des dommages aux structures secondaires, comme par exemple les parois non porteuses, rendre problématique le fonctionnement des portes et fenêtres, être visibles au point de compromettre l'esthétique, ou bien encore empêcher l'écoulement de l'eau dans les toits plats, comme cela s'est produit pour la toiture ci-contre.
On exprime habituellement la déformation admissible comme une fraction de la portée. Généralement, la déformation



Dalle en béton armé avec déformations supérieures à la limite admissible (couverture récente des ruines de Festo sur l'île de Crète)

causée par les charges permanentes et par les charges variables ne devrait pas être supérieure à 1/300 de la portée. Pour une dalle en béton armé, avec une portée de six mètres, on tolère donc une déformation maximale de 600/300 = 2 cm.
Si les déformations de la structure peuvent causer des dommages à des éléments fragiles, comme par exemple les parois et les fenêtres, la limite doit être plus prudente. Dans ces cas, on peut considérer de façon indicative une déformation admissible égale à environ 1/500 de la portée, et qui doit de toute façon être comparée à la capacité de déformation de l'élément non porteur. Si cette limite se révélait être trop contraignante, il est préférable de prévoir un joint de dilatation entre la dalle et l'élément fragile.
Evidemment, la déformation dépend aussi des charges. Les charges permanentes sont composées du poids propre de la dalle et du poids des éléments non porteurs. Les charges utiles considérées dans le dimensionnement varient généralement entre 2 et 5 kN/m², mais elles peuvent atteindre des valeurs bien plus élevées.
Le diagramme ci-contre donne l'épaisseur minimale nécessaire de la dalle pour ne pas dépasser les limites définies. Comme on le voit, la portée joue un rôle déterminant. Dans le cas d'une dalle avec une portée de six mètres, une charge utile modeste (2 kN/m²) et un niveau d'exigences ordinaire (déformation inférieure à 1/300 de la portée), nous devons prévoir une épaisseur d'au moins 0,24 m qui correspond à un élancement de 1/25. Si nous doublons la portée, nous constatons que la limite atteint 0,56 m (environ 1/21 de la portée). Dans ce cas, nous avons évidemment une solution peu efficace, dans la mesure où une grande part de la charge agissante est constituée par le poids propre de la dalle. Ceci explique le fait que l'épaisseur nécessaire augmente de façon plus que proportionnelle par rapport à la portée.
L'influence de la charge utile est relativement modeste. Si on maintient la portée à 6 mètres, et si on considère une charge variable de 5 kN/m², l'épaisseur minimale passe à 0,28 m. L'influence des déformations admissibles est en revanche plus importante. Dans le cas d'exigences accrues avec une limite égale à 1/500 de la portée, on obtient une épaisseur d'au moins 0,32 m dans le cas d'une dalle faiblement chargée.



Epaisseur minimale nécessaire pour satisfaire le critère de l'état limite de service en fonction de la portée pour une dalle rectangulaire appuyée sur deux côtés opposés avec des appuis libres de pivoter. Les courbes se réfèrent aux diverses valeurs des déformations admissibles (1/300 et 1/500 de la portée) et des charges utiles (2 et 5 kN/m²). Sont considérés le poids propre de la dalle, ainsi qu'un poids des éléments non porteurs égal à 2,5 kN/m².

L'influence du type d'appui sur le comportement de la dalle

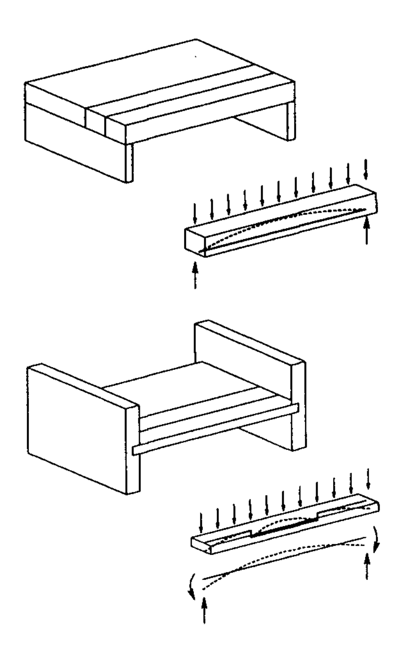
La situation que nous avons décrite correspond au cas d'une dalle appuyée sur deux murs en maçonnerie, ou sur deux poutres de rive libres de tourner. A ce schéma, semblable à celui des poutres simples sur deux appuis aux extrémités, correspond une structure funiculaire à poussée compensée, constitué d'un tirant et d'un arc qui se rejoignent sur les appuis.

Si nous observons le système porteur de la *Villa Savoye*, nous constatons que la dalle s'étend sur plusieurs poutres qui fonctionnent comme appuis. Nous avons donc des appuis qui ne sont plus libres de tourner, de sorte que la situation se rapproche de celle de la poutre encastrée aux deux extrémités. Une situation analogue peut se rencontrer si la dalle est fixée de façon monolithique à deux murs en béton armé, suffisamment rigides pour s'opposer à la rotation. Comme nous l'avons vu pour les poutres, dans ces cas les sollicitations sont réduites. La déformation subit elle aussi un effet bénéfique déterminé par l'empêchement de la rotation, et est donc pour cela fortement réduite à 1/5 de la déformation d'une dalle libre de tourner. Puisque la déformation dépend de la portée à la puissance quatre, une déformation de 1/5 peut par conséquent être observée dans une dalle libre de tourner si on réduit sa portée d'un facteur 0,67.

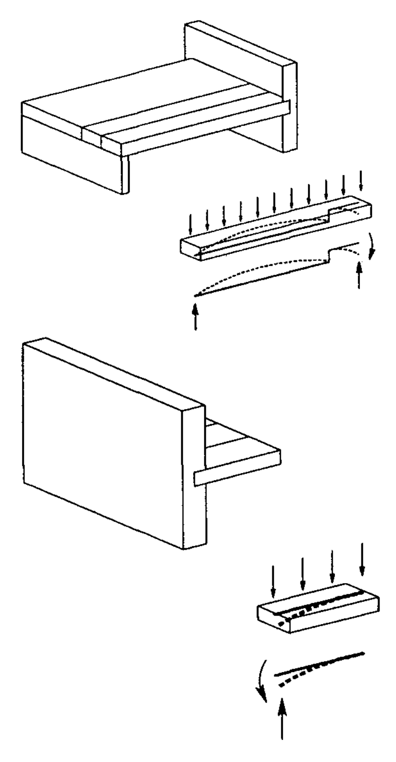
Une dalle continue ou encastrée avec une portée de six mètres se déforme donc exactement comme une dalle libre de tourner avec une portée de $0{,}67 \cdot 6 = 4$ m. Ceci signifie que nous pouvons choisir l'épaisseur de la dalle nécessaire pour satisfaire le critère de l'état limite de service, en utilisant le diagramme de la page précédente et en considérant une portée équivalente réduite. Avec une charge utile modeste et une exigence ordinaire, il faut prévoir une épaisseur d'au moins 0,14 m. Comme nous le voyons, l'encastrement permet de réduire sensiblement l'épaisseur minimale de la dalle.

Si la dalle est encastrée sur un seul côté, alors que l'appui opposé reste libre de tourner, on obtient une situation intermédiaire entre les deux cas traités, et on peut considérer une portée équivalente ℓ_{eq} égale à 0,8 fois la portée effective.

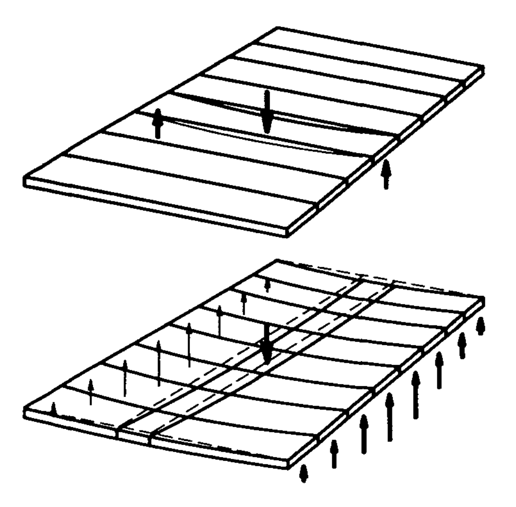
Dans le cas d'une console, non seulement les sollicitations, mais aussi les déformations deviennent très importantes. Dans ce cas, la portée équivalente correspond à 1,76 fois la longueur de la console. Une console qui fait saillie de six mètres doit donc avoir une épaisseur correspondant à celle d'une dalle simplement appuyée d'une portée de 10,56 m. Nous obtenons une épaisseur importante de 0,52 m, de sorte que la structure est fort peu efficace. Dans de tels cas,



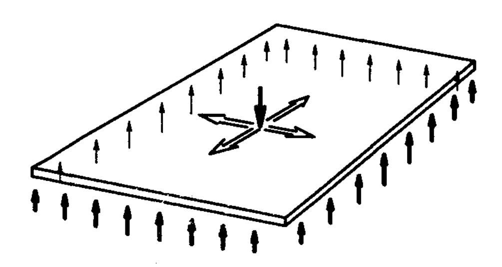
Comparaison entre une dalle simplement appuyée et une dalle encastrée sur deux côtés, déformation et structure funiculaire à poussée compensée



Dalles encastrées sur un seul côté et console



Dalle rectangulaire appuyée sur deux côtés et soumise à une charge concentrée



Dalle rectangulaire appuyée sur quatre côtés

il faudrait choisir une section plus adaptée, ou bien augmenter la rigidité de la dalle au moyen d'une précontrainte.
Les considérations faites jusqu'ici valent uniquement pour les charges uniformément réparties qui peuvent être transmises dans une seule direction vers les appuis situés sur les deux côtés opposés d'une dalle rectangulaire. Il faut encore noter que dans ces cas, quand on parle de portée, il faut comprendre évidemment la distance entre les appuis.

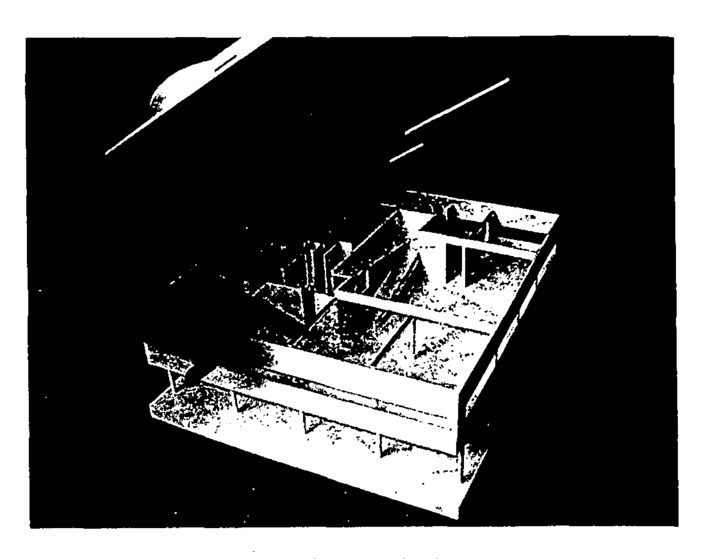
Le fonctionnement avec des charges concentrées

Appliquons maintenant sur la même dalle une force concentrée au centre. Si nous découpons la dalle en bandes, comme dans le cas précédent, nous obtenons une poutre chargée qui tend donc à s'abaisser, alors que toutes les autres restent à l'état original, sans se déformer. Ceci ne correspond certainement pas au comportement réel de la dalle. En effet, il s'établit une grille de poutres, dans laquelle les poutres transversales, à proximité de la charge concentrée, la répartissent sur plusieurs poutres dans l'autre sens. Ceci signifie qu'en réalité une charge concentrée se propage dans toutes les directions.

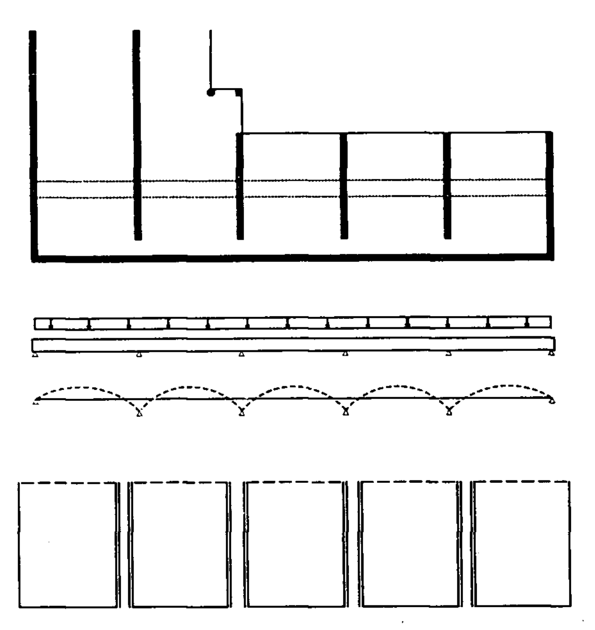
La transmission des charges dans plusieurs directions

Dans une dalle rectangulaire, appuyée sur quatre côtés, des poutres dans plusieurs directions peuvent également s'établir, même sous l'effet d'une charge uniformément répartie. La différence avec la grille de poutres réside simplement dans le fait que dans les dalles les directions des poutres que nous imaginons pour décrire le fonctionnement, ne sont pas prédéterminées, mais suivent le chemin le plus efficace pour transmettre les charges aux appuis.
Comme nous le verrons par la suite, cette plus grande efficacité correspond à une sollicitation plus faible, et surtout à des déformations inférieures.

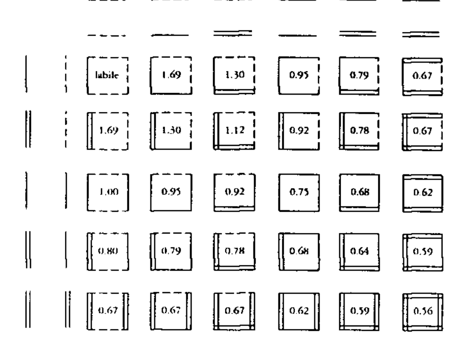
Dans les bâtiments, on rencontre souvent des dalles appuyées sur des parois et des poutres, dans lesquelles les charges uniformes sont transmises par plusieurs systèmes porteurs qui se croisent. La figure ci-contre montre un exemple dans lequel nous découvrons des situations fort diverses du point de vue de la géométrie et de la statique (cf. p. 202). Là où il y a une continuité entre des dalles avec des portées comparables, nous pouvons faire l'hypothèse d'un encastrement, alors que là où la dalle est appuyée au bord des murs ou sur des poutres, nous avons un comportement semblable à celui d'un appui libre de tourner.
Pour comprendre le fonctionnement de cette structure, il est utile d'isoler les divers éléments, de schématiser le type d'appui et d'interpréter dans quelles directions les charges peuvent être transmises aux appuis.



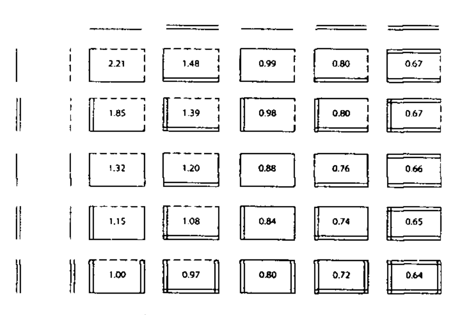
Villa Savoye à Poissy, 1930, arch. Le Corbusier et P. Jeanneret, maquette du système porteur



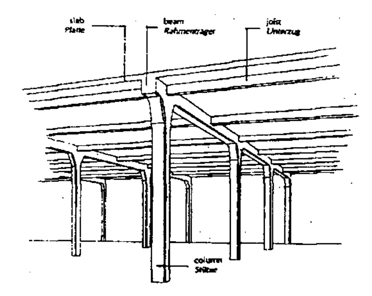
Eléments de la dalle de toiture de Villa Savoye avec schématisation des appuis et interprétation de la transmission des charges



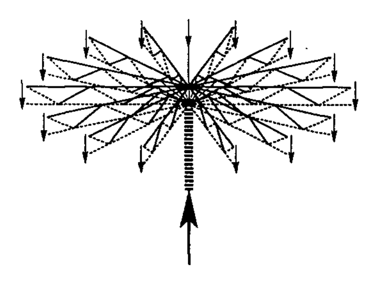
Portée équivalente, exprimée comme rapport ℓ_{eq}/ℓ, pour des dalles carrées avec divers types d'appui (.... côté libre, _ côté appuyé, = côté encastré)



Portée équivalente, exprimée comme rapport ℓ_{eq}/ℓ, pour des dalles rectangulaires avec un rapport 2/3 entre la petite et la grande portée et divers types d'appui (.... côté libre, _ côté appuyé, = côté encastré), ℓ est la portée minimale



Dessin d'explication du brevet « Système Hennebique » pour des planchers en béton armé, 1898, ing. F. Hennebique



Fonctionnement de la dalle à proximité de l'appui sur la colonne

Les tableaux ci-contre donnent les portées équivalentes pour divers types d'appui. Le premier tableau est pour une dalle carrée, alors que dans le second donne les valeurs pour une dalle rectangulaire, avec un rapport de 2/3 entre la petite et la grande portée.

Quand une dalle carrée est appuyée de la même façon sur les quatre côtés, la moitié de la charge est transmise dans une direction et l'autre dans l'autre direction. Cette dalle est moins sollicitée qu'une dalle qui fonctionne dans une seule direction, et subit des déformations plus faibles. Cet avantage se traduit par une diminution de la portée équivalente, de sorte que l'épaisseur minimale admissible peut aussi être réduite. Par exemple, une dalle carrée avec des appuis libres de tourner sur les quatre côtés présente une portée équivalente égale à 0,75 fois la portée effective. Si nous considérons une dalle carrée avec des côtés de 6 m, nous avons donc une portée équivalente réduite à 4,50 m. Nous pouvons choisir une épaisseur minimale de 0,18 m contre 0,24 m que nous avions déterminée dans le cas de la dalle appuyée sur deux côtés.

Si nous considérons en revanche une dalle de dimensions 6 × 9 m, nous avons une portée équivalente égale à 0,88 fois la portée minimale, de sorte que l'épaisseur nécessaire augmente à 0,22 m. L'effet bénéfique de la transmission des charges dans deux directions est donc nettement plus faible que dans le cas de la dalle carrée. Cet avantage devient pratiquement négligeable quand la grande portée est plus du double de la petite portée. Ceci signifie que pour ces géométries l'épaisseur minimale peut être estimée en considérant comme portée équivalente la plus petite portée.

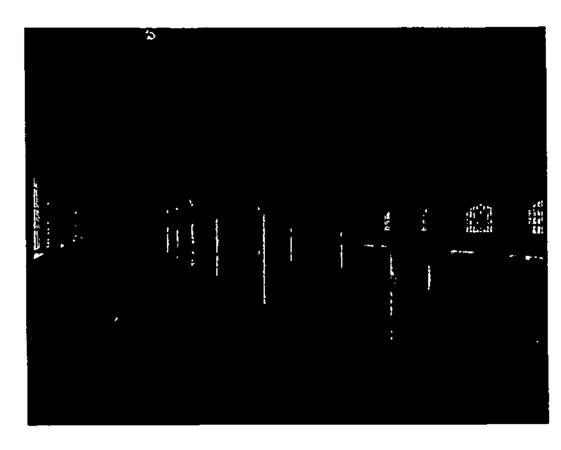
Les dalles soutenues par des colonnes

Dans les premières dalles en béton armé, appuyées sur des colonnes, de véritables poutres étaient disposées sur l'intrados de façon à répartir l'effet de la force introduite par les appuis. On avait ainsi une combinaison de dalle et de grille de poutres qui reproduisait les constructions précédentes en bois et en acier.

R. Maillart fut l'un des premiers à se rendre compte de l'énorme potentiel des dalles en béton armé. Il breveta un système de planchers appuyés sur des colonnes, sans faire appel au renforcement par des poutres. Le fonctionnement est identique à celui du plancher à nervures curvilignes construit par P.L. Nervi, dans lequel une série de nervures rayonne à partir de la colonne (cf. p. 201). A l'intérieur de la dalle s'établissent effectivement des poutres de ce type. Leur sollicitation, semblable à celle d'une poutre continue dans la zone des appuis, est représentée dans le schéma ci-contre.

La dalle-champignon

La convergence de toutes les poutres dans une zone relativement petite provoque une sollicitation très intense de la zone inférieure, sollicitée à la compression, de la zone intermédiaire, où s'instaurent des diagonales aussi bien comprimées que tendues, et de la zone supérieure, sollicitée à la traction. Pour résoudre ce problème, Maillart augmenta l'épaisseur de la dalle dans la zone critique, obtenant une dalle appelée *dalle-champignon*.
Les fameux « champignons » construits par F. L. Wright ont un fonctionnement identique. Cet exemple, peut-être plus que tout autre, démontre l'efficacité d'une structure de ce type.



Dalle-champignon à la Giesshübelstrasse à Zurich, 1910, ing. R. Maillart

Les planchers-dalles sur colonnes

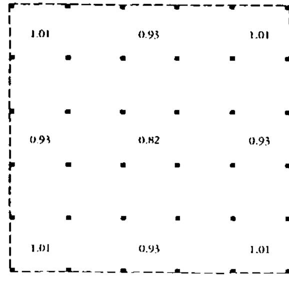
L'emploi d'un béton plus résistant, d'une armature adéquate et surtout le choix d'une dalle suffisamment épaisse, permettent d'éviter les renforts en forme de champignon sur les colonnes. Une dalle ainsi appuyée présente de très fortes sollicitations à proximité des colonnes, alors que les efforts dans la travée sont relativement faibles.



Johnson and Son Company, Administration Building, Racine Wisconsin, 1939, arch. F. L. Wright [Johnson Wax image, © 2004, ProLitteris, Zurich]



Plancher-dalle soutenu par des colonnes dans le Visual Arts Center, Cambridge Mass., 1964, arch. Le Corbusier



Portées équivalentes pour divers cas de planchers-dalles soutenus par des colonnes

Le choix de l'épaisseur des planchers-dalles

Dans les planchers-dalles en béton armé, sur colonnes, l'effet bénéfique de la transmission des charges dans les deux directions est compensé par la concentration des efforts à proximité des appuis. Dans le choix de l'épaisseur, c'est en effet le critère de l'état limite ultime qui est souvent déterminant. Si la zone critique est renforcée avec des « champignons » ou des armatures particulières, on peut estimer l'épaisseur de la dalle en considérant les portées équivalentes reportées ci-contre et en utilisant le diagramme de la page 203.

Dans les planchers-dalles avec colonnes à maille régulière, ce sont les travées de rive qui présentent les plus grandes déformations et qui sont déterminantes si l'épaisseur est maintenue constante pour tout le plancher.

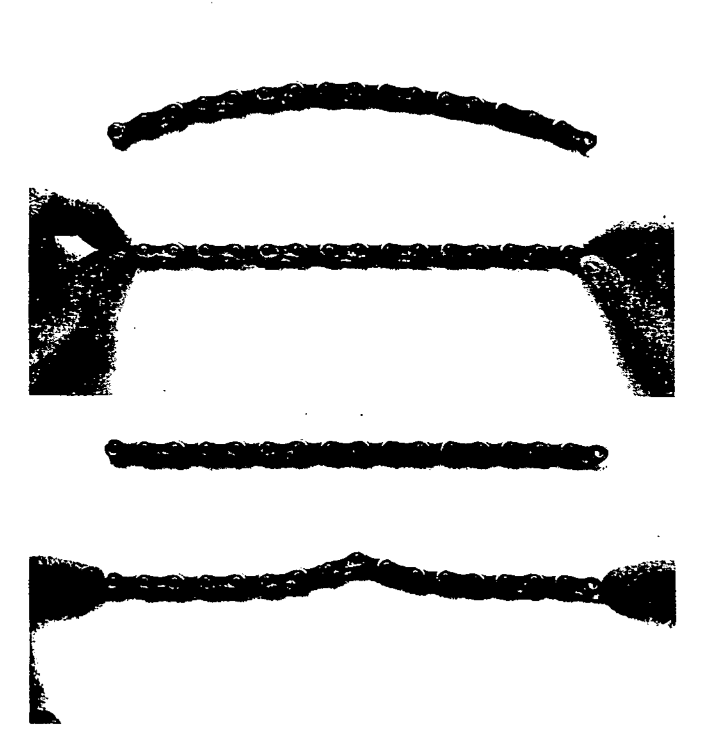
La stabilité des éléments comprimés

Les barres tendues et les barres comprimées

Nous avons déjà vu plusieurs fois que pour projeter une structure nous devons toujours distinguer si l'effort est de traction ou de compression. La reconnaissance de ces différents efforts est importante pour deux raisons.

Avant tout, certains matériaux comme par exemple le béton, la pierre et la maçonnerie sont très résistants à la compression, alors qu'ils ont une résistance à la traction limitée. En outre, la transmission d'un effort de compression d'un élément à l'autre est beaucoup plus facile, dans la mesure où habituellement un simple contact suffit.

D'autre part, comme nous l'avons déjà souligné plusieurs fois, la reprise des efforts de compression n'est cependant pas exempte de problèmes. Alors qu'un effort de traction dans une structure provoque des déformations et des déplacements qui conduisent la structure à se rapprocher de la ligne d'action de l'effort, la même structure, si elle est sollicitée à la compression, tend à s'éloigner de la position idéale, de sorte que les efforts s'intensifient. Ceci vaut aussi bien pour une série de barres reliées par des articulations que pour une structure monolithique.



Mécanisme labile de barres tendues et le même système sollicité à la compression

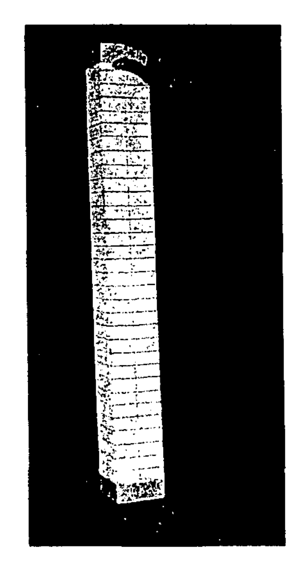
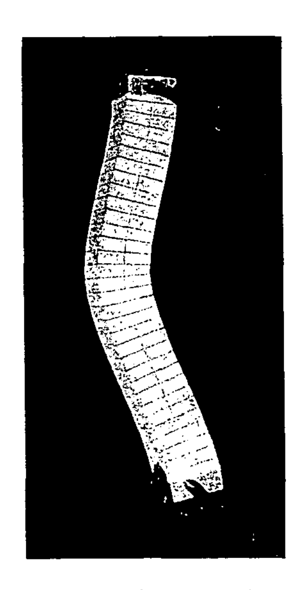
Dans le premier cas, nous avons une structure labile. Comme cela est montré ci-contre, si un tel système est sollicité à la traction, les barres qui forment un mécanisme se déplacent jusqu'à coïncider avec le polygone funiculaire des charges, quelle que soit l'excentricité initiale. Dès que l'excentricité s'annule, une structure labile est en mesure de résister aux charges prévues, à condition que la résistance du matériau soit suffisante.

Si, au contraire, le système est sollicité à la compression, une toute petite excentricité initiale est suffisante pour conduire les barres à s'éloigner de la position d'équilibre. Une structure de ce type est effectivement instable.

Tout cela est facilement identifiable intuitivement en examinant l'exemple reproduit ci-contre, dans lequel le polygone funiculaire est représenté par une ligne droite, mais cela vaut dans n'importe quel cas. A la page 71, nous avons déjà considéré un système dans lequel le polygone funiculaire a une forme trapézoïdale, et nous étions arrivés à la même conclusion: un câble est stable, alors qu'un arc labile ne l'est pas.

Dans le cas d'une structure isostatique ou même hyperstatique, les effets sont semblables. Si on tire sur les extrémités d'une barre courbe, on aura une flexion due à l'excentricité, avec un effort de traction à l'intérieur et de compression à l'extérieur. La partie interne s'allonge, alors que la partie externe se raccourcit, de sorte que nous

aurons un déplacement similaire à celui du système labile que nous avons déjà décrit. Dans l'exemple représenté ci-contre, le matériau a une rigidité très basse, de sorte que le déplacement est facilement observable. Avec un matériau plus rigide, bien qu'en présence de déplacements plus petits, nous obtiendrions qualitativement le même effet. Si maintenant nous comprimons la même barre et si nous analysons les sollicitations qui s'établissent à l'intérieur du matériau après avoir provoqué un déplacement latéral, nous observons que sur le côté interne la zone comprimée se raccourcit, alors que sur le côté externe tendu le matériau s'allonge. Ces déformations ont pour effet d'incurver la barre plus fortement, de sorte que celle-ci continue de s'éloigner de la position idéale qui correspond au polygone funiculaire des charges (dans notre cas une ligne droite entre les deux mains).
L'éloignement de la structure déformée de la ligne d'action de l'effort crée une nouvelle augmentation des sollicitations de traction sur le bord externe et de compression sur le bord interne. L'augmentation de la sollicitation déforme encore la barre en l'éloignant toujours plus de la ligne d'action de l'effort, et ainsi de suite. Il s'agit d'un véritable cercle vicieux, qui conduit à une instabilité de la barre.
Ce problème peut être très sérieux. Si l'effort de compression appliqué dépasse une valeur critique, appelée *charge critique de flambage*, la barre se déforme par flambage et se brise, sous l'effet de la flexion.
Si, en revanche, la charge est inférieure à la valeur critique, la barre s'arrête après un certain déplacement. Les sollicitations augmentent dans tous les cas.

Barre en caoutchouc mousse sollicitée à la traction et à la compression

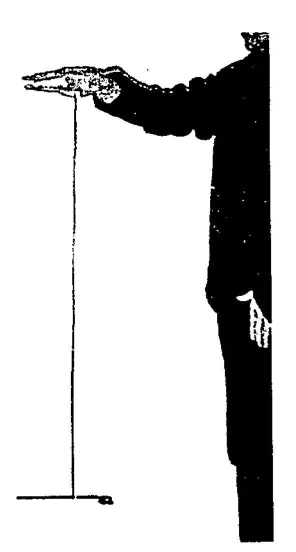
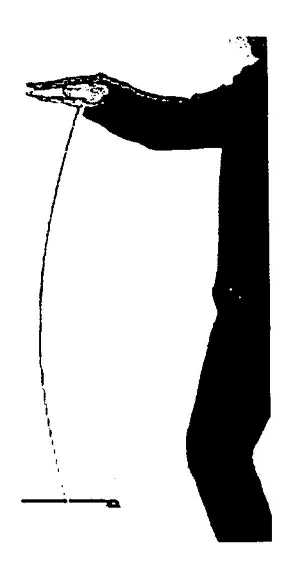
La résistance d'une barre comprimée

Ceci signifie que la résistance d'un élément structural comprimé peut être inférieure au produit de la résistance du matériau par l'aire de sa section:

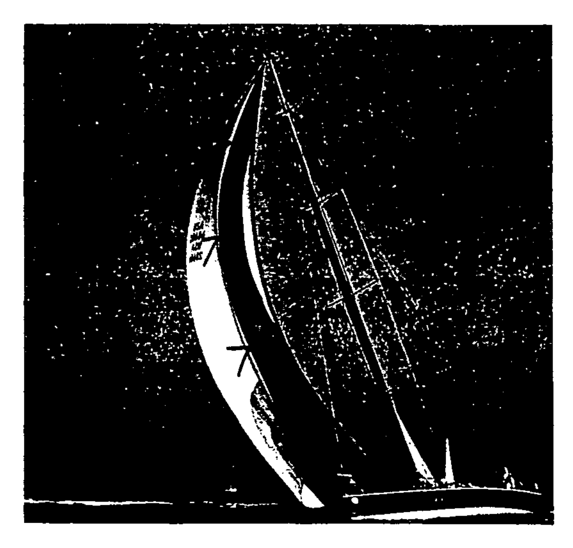
$$N_R << f_y \cdot A$$

Pour décrire quantitativement ce phénomène, analysons l'exemple de la barre métallique représentée ci-contre.
Si nous soumettons la barre à un effort de traction, nous aurons une résistance égale à:

$$N_R = A \cdot f_y = 12{,}57\ mm^2 \cdot 235\ N/mm^2 = 2953\ N$$

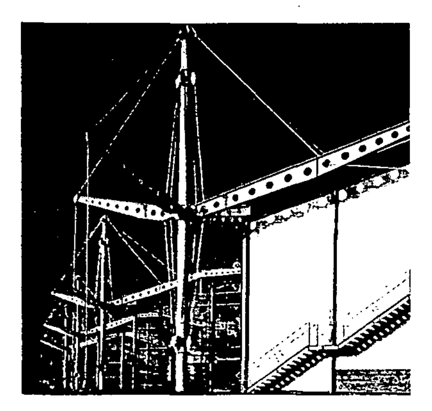
Barre mince sollicitée à la compression (diamètre $\phi = 4$ mm, aire de la section $A = \pi \cdot 2^2 = 12{,}57$ mm², acier avec limite d'écoulement $f_y = 235$ N/mm², module d'élasticité $E = 210000$ N/mm², longueur $\ell = 800$ mm)



Bateau à voile avec le mât comprimé et les haubans tendus



Mât comprimé et haubans tendus du pont de Brotonne, 1977, arch. A. Arsac et P. Fraleau, ing. J. Mathivat et J. Muller



Centre de distribution Renault en Angleterre à Swindom, 1982, arch. N. Foster, ing. bureau Ove Arup

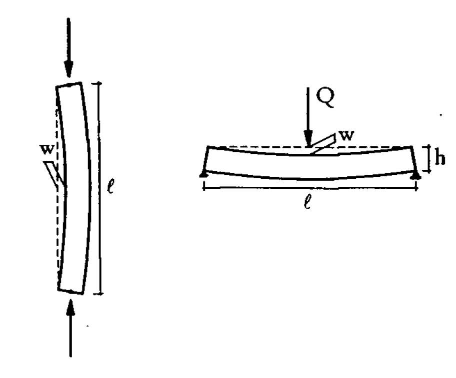
En d'autres termes, si nous fixons l'extrémité supérieure de cette barre au plafond, au moins quatre personnes avec une masse totale d'environ 300 kg doivent se pendre à l'extrémité inférieure pour provoquer l'écoulement.
Si nous tentons en revanche de comprimer la même barre, nous observons que la charge maximale que nous pouvons appliquer est bien moindre et peut être facilement exercée par une seule personne. Quand la compression atteint environ 40 N, correspondant à seulement 4 kg, la barre se déforme par flambage et l'effort ne peut plus être repris. Dans cet exemple, la résistance à la compression de la barre est donc bien plus faible que la résistance à la traction. Mais si nous ne considérons que le matériau, s'agissant de l'acier, la résistance à la compression est identique à la résistance à la traction.
Il faut noter que ce phénomène d'instabilité se vérifie aussi si l'imperfection initiale – due à la tolérance de l'exécution – est très faible ou même carrément imperceptible. Puisque des imprécisions de ce type ne peuvent évidemment pas être exclues, le problème de l'instabilité doit absolument être pris en considération et doit sérieusement préoccuper quiconque projette une structure avec des éléments comprimés.

Comment rendre une colonne stable

Pour faire face à ce problème, nous devons avant tout nous rendre compte que la colonne ne doit pas seulement garantir une résistance suffisante, considérée comme le produit de la résistance du matériau par l'aire de la section, mais doit aussi être rigide à la flexion, au moins suffisamment pour ne pas trop se déformer dans le sens transversal. Nous avons déjà vu qu'un matériau trop déformable comme le caoutchouc mousse n'est pas apte à résister à un effort de compression. Comme nous le verrons par la suite, la forme de la section joue aussi un rôle important. Il existe donc une différence essentielle entre le fait de projeter un élément tendu ou comprimé, même dans les cas où le matériau présente des résistances identiques à la traction et à la compression.
Dans une structure métallique, par exemple, si l'aire de la section et la résistance du matériau sont suffisants, nous pouvons choisir des tirants très minces, alors que les éléments comprimés doivent être constitués par des profils bien plus volumineux. Ceci est bien montré dans les trois exemples ci-contre: bien que l'ordre de grandeur des efforts soit comparable, les tirants sont beaucoup plus minces, alors que les éléments comprimés sont plus volumineux de façon à garantir une stabilité suffisante.

Une colonne, pour être suffisamment stable et résister à la compression, doit donc être en mesure de résister à une charge transversale, sans trop se déformer.
Nous pouvons analyser notre colonne en la faisant pivoter à l'horizontale et en la traitant comme une poutre chargée à mi-portée, pour étudier sa rigidité. Il ne faut jamais oublier que les sollicitations de la poutre sont similaires, mais non identiques à celles de notre colonne simplement comprimée. Cette analogie nous sert uniquement pour étudier quels sont les paramètres qui influencent la rigidité, de façon à pouvoir proposer des contre-mesures pour éviter l'instabilité.
Comme nous l'avons déjà vu lorsque nous avons traité le sujet des poutres, ces paramètres sont:

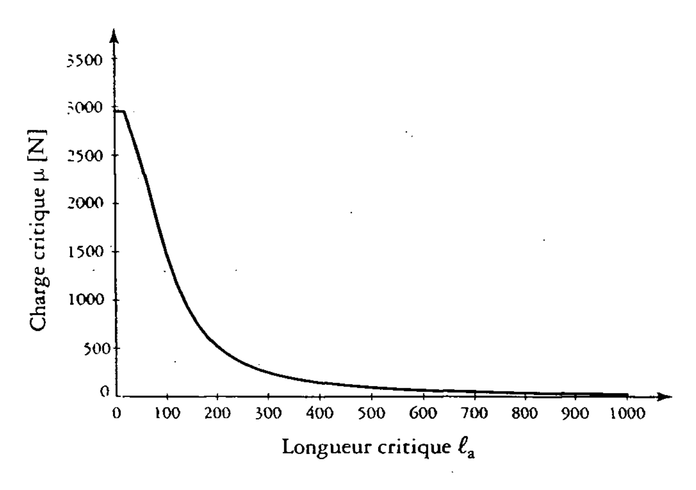
1. la portée de la poutre (dans notre cas la hauteur de la colonne);
2. les liens (en d'autres mots comment elle est retenue aux extrémités)
3. la rigidité du matériau;
4. les dimensions de la section;
5. la forme de la section.



Analogie entre une colonne instable et une poutre chargée transversalement

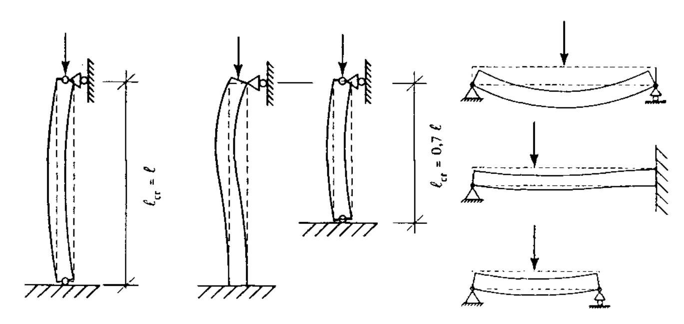
L'influence de la hauteur de la colonne sur la résistance à la compression

L'influence de la longueur sur la rigidité à la flexion est claire. En conservant tous les autres paramètres, une poutre avec une grande portée est beaucoup moins rigide qu'une poutre courte. C'est pourquoi les colonnes hautes sont beaucoup plus sujettes au phénomène du flambage que les colonnes courtes.
Dans le graphique représenté ci-contre, la charge critique de flambage de la barre, que nous avons décrite précédemment, est exprimée en fonction de sa longueur. Comme nous le constatons, la résistance vaut seulement 40 N pour une longueur de 800 mm, et diminue encore si la longueur augmente. En outre, nous pouvons observer que la résistance du matériau ne peut être complètement exploitée que si la longueur est inférieure à environ 20 mm: pour pouvoir exploiter au moins la moitié de la résistance du matériau, la longueur ne doit pas dépasser 100 mm.
Nous pouvons généraliser ces données, en affirmant que dans une colonne en acier, avec une section circulaire pleine, la résistance du matériau est complètement exploitée si la hauteur est inférieure à 5 fois le diamètre, alors que ce rapport ne doit pas dépasser 25 si nous voulons exploiter le matériau à au moins 50%.

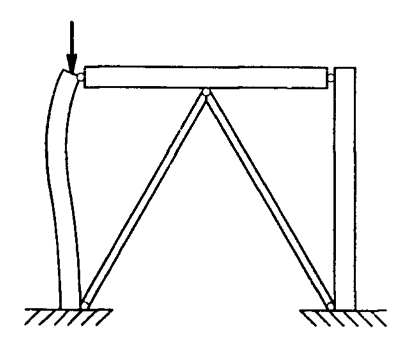


Influence de la longueur de la colonne sur la résistance à la compression (charge critique de flambage)

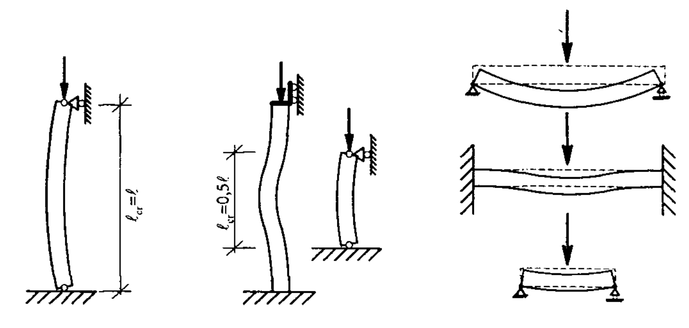
L'influence des conditions d'appui, la longueur critique



Comparaison des modes de flambage d'une colonne libre de tourner, d'une colonne encastrée à la base et d'une colonne longue de seulement 70%; analogie de la poutre avec la comparaison des déplacements (rigidités)



Exemple avec une colonne encastrée à la base et libre de tourner au sommet



Comparaison des modes de flambage d'une colonne libre de tourner, d'une colonne encastrée aux extrémités et d'une colonne longue de seulement 50%; analogie de la poutre avec la comparaison des déplacements (rigidités)

Les relations que nous venons de décrire entre l'élancement, considéré comme le rapport entre la hauteur de la colonne et son diamètre, et le degré d'exploitation du matériau, sont valables pour le modèle de colonne analysé, avec l'hypothèse que les extrémités sont fixes mais libres de tourner.

Si, en revanche, l'extrémité inférieure est encastrée, empêchant ainsi sa rotation, on observera une augmentation de la charge critique de flambage. Pour notre modèle, avec une colonne haute de 800 mm, la charge critique de flambage double: de 40 à 77 N. L'augmentation est facile à expliquer si on pense à l'analogie avec la poutre. Si une extrémité est encastrée, une même charge transversale provoquera des déplacements plus petits. En d'autres termes, la rigidité à la flexion augmente.

La nouvelle colonne présente une charge critique de flambage comparable à celle d'une colonne plus courte, mais avec les extrémités libres de tourner. Pour notre modèle, nous devrions réduire la hauteur de 800 mm à 560 mm pour conserver une charge critique de flambage de 77 N. Cette nouvelle longueur, correspondant à 70% de la longueur initiale, est définie comme la longueur critique ℓ_{cr}.

La figure ci-contre montre un schéma structural typique, dans lequel la colonne a les conditions d'appui décrites cidessus. L'encastrement à la base existe puisque la colonne n'est pas libre de tourner par rapport à la fondation, alors qu'à son sommet une articulation entre la colonne et la poutre horizontale la rend libre. A cet endroit, la colonne n'est toutefois pas libre de se déplacer dans le sens horizontal, à cause de la présence d'un système de contreventement.

La rigidité est encore plus grande et donc aussi la charge critique de flambage, si les deux extrémités d'une colonne sont encastrées. Naturellement, l'extrémité supérieure, bien qu'elle soit encastrée, doit être libre de se déplacer verticalement. Dans le cas contraire, la charge n'irait pas solliciter la colonne, parce qu'elle serait complètement reprise par l'appui.

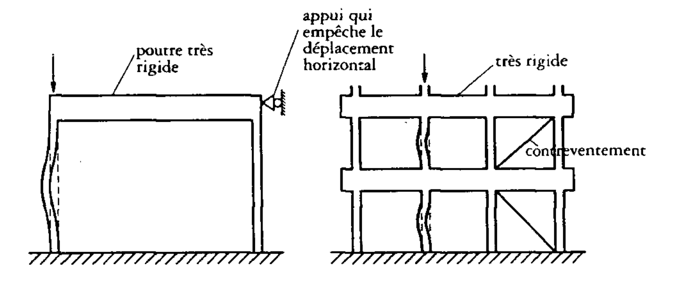
Notre colonne haute de 800 mm a maintenant une charge critique de flambage de 147 N. Pour obtenir la même résistance au flambage avec une colonne libre de tourner aux extrémités, nous devrions réduire sa hauteur à 400 mm. En d'autres termes, pour la colonne encastrée aux deux extrémités, la longueur critique correspond à 50% de la hauteur totale.

Nous rencontrons ces colonnes dans les cadres, dans lesquels l'élément horizontal est beaucoup plus rigide que la colonne, de sorte que les rotations aux extrémités sont empêchées. Pour faire en sorte que le déplacement horizontal au sommet soit rendu impossible, il est nécessaire, dans ce cas aussi, d'avoir la présence d'un système rigide de contreventement. Les colonnes du *Carré d'art à Nîmes*, apparemment très minces, sont encastrées dans des poutres supérieures très rigides. Le mouvement horizontal des poutres, et donc aussi de la tête des colonnes, est empêché par un système de contreventement horizontal fixé au bâtiment.

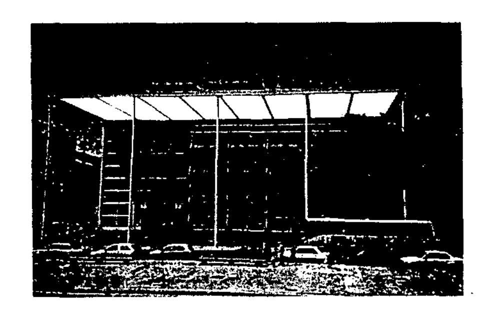
Si le contreventement est absent, le cadre devient moins rigide, puisqu'il peut se déplacer dans le sens horizontal. Le mode de flambage change aussi radicalement: le déplacement maximum se produit à l'extrémité supérieure.

Notre colonne haute 800 mm a de nouveau une charge critique de flambage de 40 N, identique à celle de la colonne libre de tourner aux extrémités. Ceci signifie que dans ces colonnes aussi, la longueur critique correspond à la hauteur de la colonne.

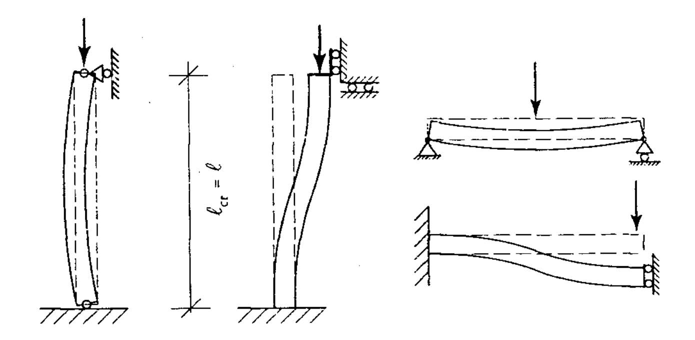
Sur la base de ces considérations, nous pouvons affirmer que les contreventements, définis comme systèmes structuraux capables de reprendre les charges horizontales, ont aussi une autre fonction très importante: celle d'augmenter la charge critique de flambage des colonnes, et donc leur résistance aux charges verticales.



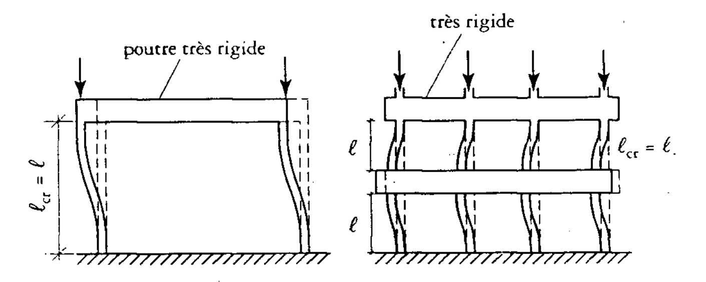
Exemples avec colonnes encastrées aux extrémités



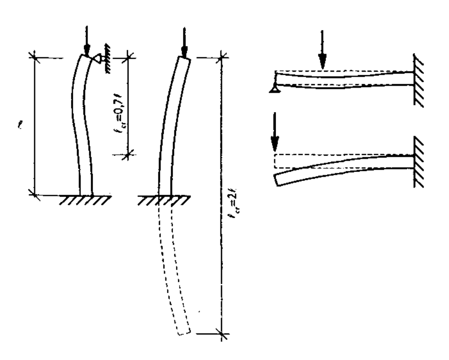
Carré d'art à Nîmes, 1993, arch. N. Foster, ing. bureau Ove Arup + OTH Méditerranée



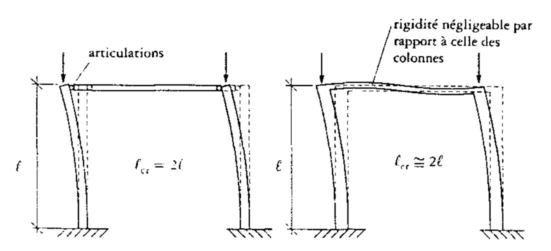
Comparaison des modes de flambage d'une colonne libre de tourner, et d'une colonne encastrée aux extrémités mais libre de se déplacer dans le sens horizontal; analogie de la poutre avec la comparaison des déplacements (rigidités)



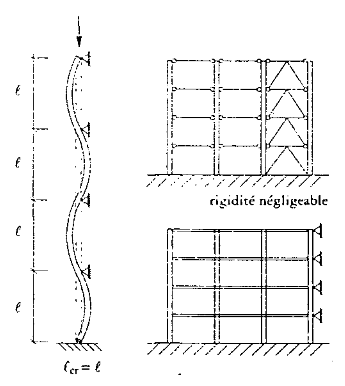
Exemples avec des colonnes encastrées aux extrémités, mais libres de se déplacer dans le sens horizontal



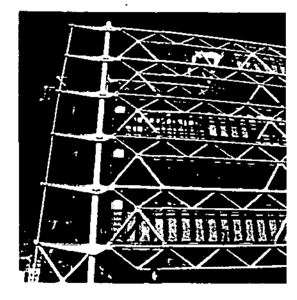
Comparaison des modes de flambage d'une colonne libre de tourner, mais retenue aux extrémités, et d'une autre encastrée à la base et complètement libre au sommet; analogie de la poutre avec la comparaison des déplacements (rigidités)



Exemples avec des colonnes encastrées à la base et complètement libres au sommet



Mode de flambage d'une colonne continue et cadres avec la longueur critique des colonnes équivalente à la hauteur des étages



Colonnes du Centre Georges Pompidou à Paris (cf. pp. XIV et 131)

Si nous supprimons le système de contreventement, dans le cas d'une colonne libre de tourner au sommet, la rendant ainsi libre aussi de se déplacer dans le sens horizontal, nous observons une forte réduction de la charge critique de flambage. Notre modèle avec la barre haute de 800 mm et un diamètre de 4 mm voit sa résistance réduite des 77 N initiaux à seulement 10 N. Pour obtenir la même réduction, nous devrions augmenter la longueur d'une colonne libre de tourner, mais retenue horizontalement, des 800 mm initiaux à 1600 mm. Ceci signifie que la longueur critique correspond au double de la hauteur de la colonne.

Examinons pour finir le cas d'un cadre sur plusieurs étages avec des colonnes continues, mais libres de tourner parce que liées aux poutres horizontales par des articulations. Etant donné que ces articulations peuvent reprendre des efforts horizontaux, les colonnes ne sont pas en mesure de se déplacer dans ce sens.

Une situation fort semblable se présente quand, dans un cadre, les poutres horizontales sont encastrées dans les colonnes, mais présentent une rigidité flexionnelle bien plus faible que celle des colonnes. Dans ce cas elles ne sont pas en mesure d'empêcher la rotation des colonnes.

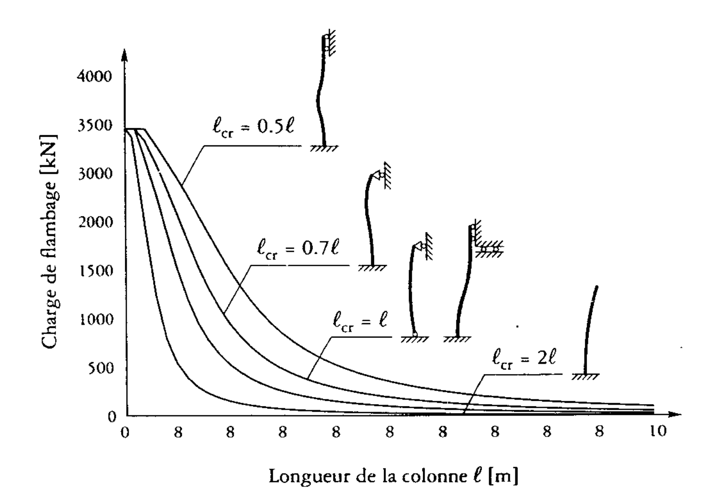
Dans ces exemples, les colonnes peuvent se déformer par flambage en formant une onde qui présente une longueur critique correspondant à la hauteur des étages. La charge critique de flambage est ainsi identique à celle de colonnes interrompues à chaque étage.

Un exemple est représenté par les colonnes du *Centre Georges Pompidou* à Paris. A chaque étage, les colonnes sont retenues par un système de contreventement, mais sont libres de tourner.

Comme nous l'avons vu, les conditions d'appui influencent de façon importante la rigidité flexionnelle, et donc aussi la charge critique de flambage des colonnes. Ce phénomène peut être fort bien décrit par la longueur critique qui correspond à la hauteur d'une colonne articulée aux extrémités, présentant la même charge critique de flambage.

Chaque fois que nous restreignons les conditions d'appui d'une colonne, nous opposant ainsi à un déplacement horizontal ou à une rotation, nous diminuons sa longueur critique, augmentant ainsi sa charge critique de flambage.

Le graphique ci-contre représente la charge critique de flambage de notre modèle de colonne en fonction de la hauteur, avec les diverses conditions d'appui possibles et les longueurs critiques correspondantes.



Charge critique de flambage en fonction de la hauteur de la colonne (acier S235, diamètre 4 mm) avec les diverses conditions d'appui possibles

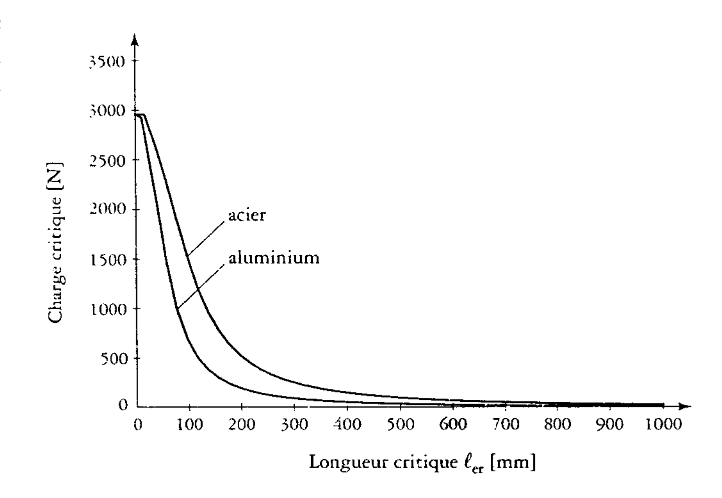
L'influence de la rigidité du matériau sur la charge critique de flambage d'une colonne

Un matériau avec un faible module d'élasticité a clairement plus tendance à se déformer par flambage. Nous avons déjà expérimenté cette situation avec le bloc en caoutchouc mousse.

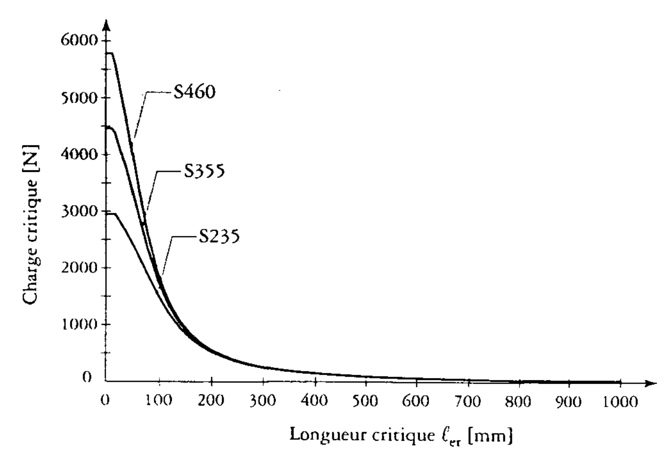
Cette particularité est importante pour l'aluminium, qui a un module d'élasticité correspondant à 1/3 de celui de l'acier. Nous pouvons donc affirmer que les éléments comprimés en aluminium sont particulièrement délicats du point de vue de la stabilité.

Le graphique ci-contre montre la charge critique de flambage de notre modèle avec la barre en acier comparée avec le modèle d'une barre identique, mais en aluminium.

Quand nous comparons divers matériaux entre eux, c'est surtout le module d'élasticité qui influence la charge critique de flambage de colonnes élancées. La résistance du matériau a en revanche une influence négligeable, et n'est déterminante que pour les colonnes trapues.



Charge critique de flambage en fonction de la hauteur de la colonne pour une barre en acier S235 et pour une barre en aluminium avec la même limite d'écoulement



Charge critique de flambage en fonction de la colonne pour trois barres en acier S235, S355 et S460 (diamètre 4 mm, colonnes libres de tourner aux extrémités)

Diamètre ϕ [mm]	Aire [mm²]	Augmentation de l'aire	Charge critique [N]	Augmentation de la charge critique	Exploitation du matériau
4	12,57		40		1%
8	50,27	×4	585	×15	5%
16	201,06	×16	8328	×215	18%
32	804,25	×64	95222	×2500	50%

Influence de la dimension de la colonne sur la charge critique de flambage (section circulaire pleine, longueur critique = 800 mm, acier S235)

Cette considération a un résultat pratique fort important: il n'y a aucune utilité à employer de l'acier à haute résistance si les colonnes sont trop minces pour pouvoir exploiter la résistance du matériau. Ceci apparaît de façon évidente dans le diagramme ci-contre, dans lequel la charge critique de flambage de notre modèle, avec trois barres en acier S235, S355 et S460, est exprimée en fonction de l'élancement de la colonne.

D'autres matériaux de construction, comme par exemple le béton, la maçonnerie et le bois, ont un module d'élasticité nettement inférieur à celui de l'acier. Ceci est toutefois compensé par le fait que les sections sont généralement plus massives, de sorte que la stabilité, bien que n'étant certainement pas négligeable, représente souvent un problème moins déterminant que pour les structures métalliques.

L'influence de la dimension de la section

Les dimensions de la section sont un paramètre fondamental qui influence aussi la stabilité et la résistance d'une colonne en acier. En les augmentant, ce n'est pas seulement l'aire qui augmente, mais aussi la rigidité à la flexion de la colonne, et donc aussi sa stabilité. On a donc la superposition de deux effets: une plus grande aire à disposition et un élancement inférieur, de sorte que le matériau peut mieux être exploité. Pour quantifier cet effet, reprenons notre exemple d'une barre de 4 mm de diamètre et une longueur critique de 800 mm. Comme nous l'avons vu, la charge critique de flambage vaut 40 N, avec une utilisation du matériau de 1%.

Si nous doublons le diamètre, de sorte que l'aire de matériau à disposition est quadruplée, et si nous conservons la longueur critique, la résistance passe à 585 N, ce qui signifie 15 fois la résistance initiale. Le degré d'utilisation s'élève ainsi à 5%.

Si nous doublons encore le diamètre, nous observons alors que la résistance augmente encore plus rapidement que l'augmentation de l'aire (cf. tableau ci-contre).

Avec ϕ = 32 mm, nous avons une aire qui est 64 fois l'aire d'origine. La charge critique de flambage est en revanche 2500 fois celle de la barre avec ϕ = 4 mm, avec un degré d'utilisation qui atteint 50%. Ce degré d'utilisation est en effet celui que nous avons déjà observé par une colonne qui présente un élancement de 25 (100 mm/4 mm ou bien comme maintenant 800 mm/32 mm).

L'influence de la forme de la section

Pour augmenter la rigidité à la flexion d'une colonne, et donc aussi sa capacité à résister au flambage, il existe une solution beaucoup plus efficace que la simple augmentation des dimensions en accroissant le diamètre.

Comme nous l'avons déjà vu à propos de la rigidité des poutres (cf. p. 168), une section rectangulaire pleine est beaucoup moins efficace qu'une section en I pour une quantité égale de matériau et une même hauteur. En général, on peut affirmer que plus la distance entre la zone tendue et la zone comprimée est grande, et plus la colonne sera rigide à la flexion, et par conséquent résistante au flambage.

L'efficacité d'une colonne dépend donc aussi de la forme de sa section, qui joue un rôle très important. Employer le matériau de façon intelligente, en utilisant des sections avec des parois minces présentant une grande distance entre la zone tendue et la zone comprimée, est donc d'une importance fondamentale.

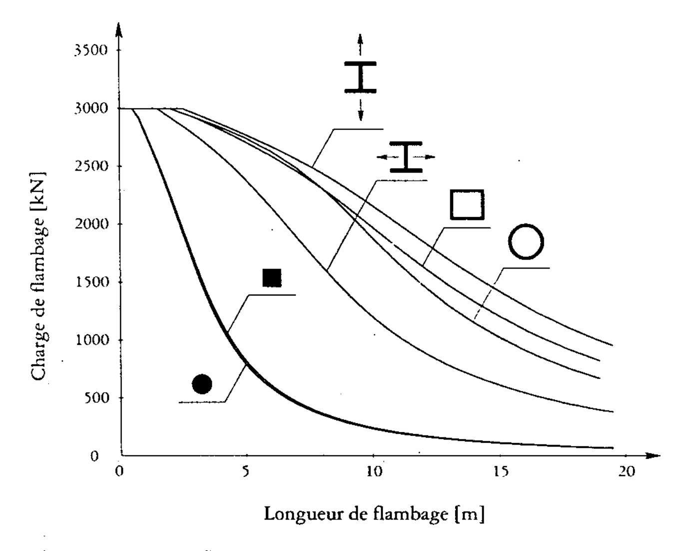
Le graphique ci-contre compare des sections en I, des sections à caisson, des sections tubulaires et des sections pleines, avec une même surface (et donc avec la même quantité de matériau employé) et avec une dimension extérieure maximale de 30 cm.

Il résulte clairement qu'une section pleine est beaucoup moins efficace qu'une section tubulaire ou en I.

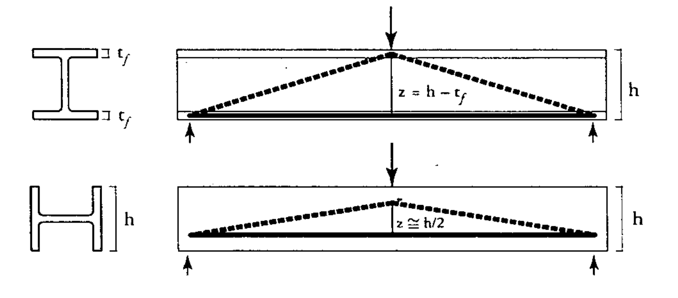
Par conséquent, le choix du type de section doit tenir compte du type de sollicitation. En présence de traction, comme nous l'avons vu, la forme n'influence pas la résistance de la section, et nous pourrons donc choisir également des sections pleines. Pour les éléments comprimés, si nous voulons exploiter correctement le matériau, il est en revanche nécessaire de choisir des sections creuses ou en I.

Il faut observer que les sections en I, contrairement aux sections à caisson ou tubulaires, présentent des résistances différentes dans les deux directions. Comme nous l'avons déjà vu, une poutre en I soumise à des charges verticales, avec les ailes disposées verticalement, est beaucoup moins rigide que la même poutre disposée de façon conventionnelle, avec les ailes horizontales.

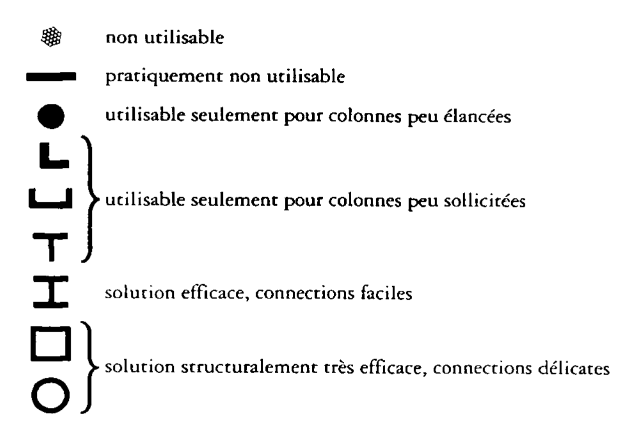
Dans les éléments comprimés avec une section en I, il est donc opportun de limiter la longueur critique par des éléments stabilisateurs qui retiennent la colonne et empêchent le déplacement dans le sens de la rigidité la plus faible. Dans l'autre sens, ces éléments ne sont pas nécessaires, ou bien peuvent être disposés avec un plus grand espacement, puisque même une longueur critique plus grande n'est pas déterminante.



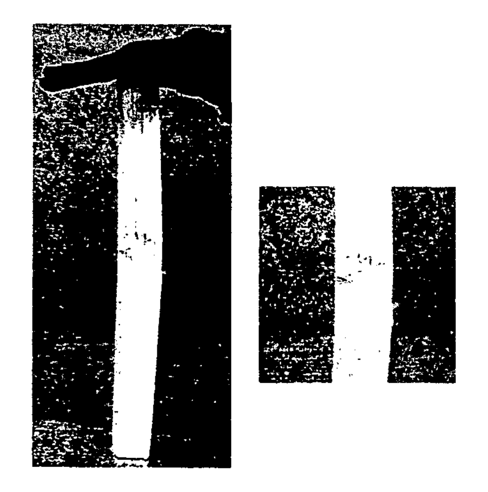
Charge critique de flambage: sections comparées



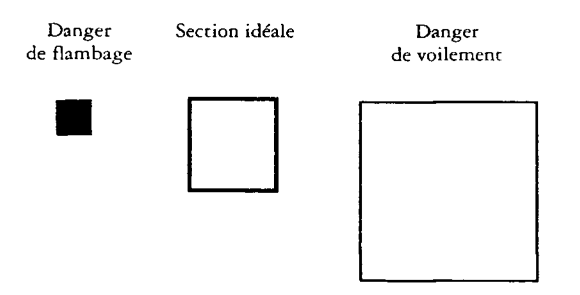
Rigidité d'une poutre avec section en I: ailes disposées horizontalement ou verticalement



Choix des sections métalliques pour les éléments comprimés



Voilement d'une colonne à parois minces



Sections avec la même quantité de matériau

Le choix des sections

Par conséquent, le choix du type de section doit passer par l'analyse des sollicitations. Le schéma ci-contre résume les sections les plus couramment utilisées dans les structures métalliques.

Dans les structures en béton armé aussi, à partir d'un certain élancement, il devient nécessaire de choisir des sections efficaces pour éviter le flambage.

Le voilement

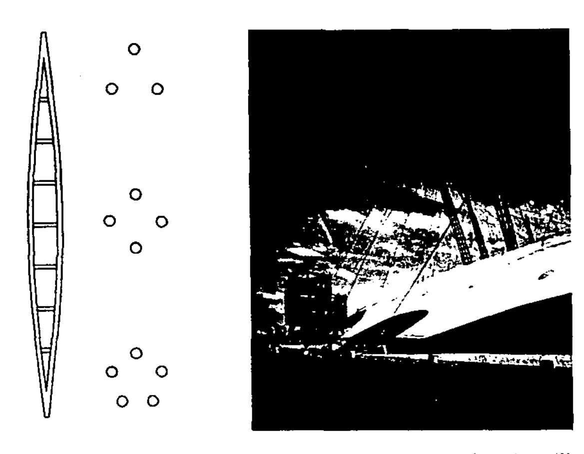
La règle selon laquelle pour résister au flambage d'une colonne il est opportun d'utiliser des sections avec des parois minces, qui présentent une grande distance entre la zone tendue et la zone comprimée, a cependant des limites. En effet, si une colonne à caisson ou tubulaire, avec une section à parois très minces, est chargée, un phénomène d'instabilité locale des parois minces appelé *voilement* intervient avant que ne se produise le flambage de la colonne. Ce phénomène peut être facilement expérimenté en construisant une colonne à section tubulaire avec l'aide d'une feuille de papier pliée. Si on charge cette maquette, on pourra noter qu'il se produit une espèce de « flambage local » de « petites colonnes » qui apparaissent à l'intérieur des parois minces, avant que la colonne ne se déforme par flambage.

Dans le projet de la section d'une colonne, il est nécessaire de trouver le bon compromis entre une section pleine et massive, qui risque de se déformer par flambage, et une section avec des parois trop minces, qui peuvent présenter une instabilité locale. La section optimale d'une colonne à section creuse présente un rapport entre la largeur de la colonne et l'épaisseur de la paroi qui se situe entre 30 et 50.

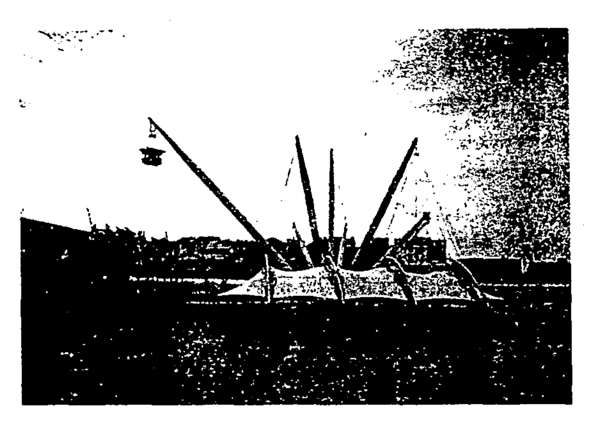
S'il est important de réduire la quantité de matériau, il est préférable d'employer des treillis (cf. Tour Eifel à la page 147 ou des poutres Vierendeel (voir ci-contre) comme éléments comprimés. Pour garantir la stabilité nécessaire dans toutes les directions, ces éléments auront au moins trois membrures. Ces solutions sont souvent utilisées, car elles garantissent également une grande transparence.

Colonnes à section variable

Pour atteindre ce but en obtenant une structure apparemment plus élancée, il est courant de faire varier la section. Comme le montrent les deux exemples ci-contre, dans les zones où les efforts peuvent être plus importants et une grande rigidité à la flexion est nécessaire pour s'opposer au flambage, on choisit une section plus rigide, alors que dans les autres zones, où les excentricités par rapport au polygone funiculaire des charges sont moindres et la rigidité est moins nécessaire, les dimensions de l'élément peuvent être radicalement diminuées. Ces solutions permettent en outre une transition élégante entre les zones centrales, avec des sections importantes, et les extrémités articulées, dans lesquelles l'effort est obligé de passer.
Pour la définition de la forme optimale des éléments comprimés, on peut se référer à l'analogie avec le problème de la reprise des charges transversales. On peut donc appliquer une charge virtuelle transversale et uniformément répartie sur la colonne et construire une structure funiculaire à poussée compensée correspondante, qui nous fournira directement la forme recherchée.



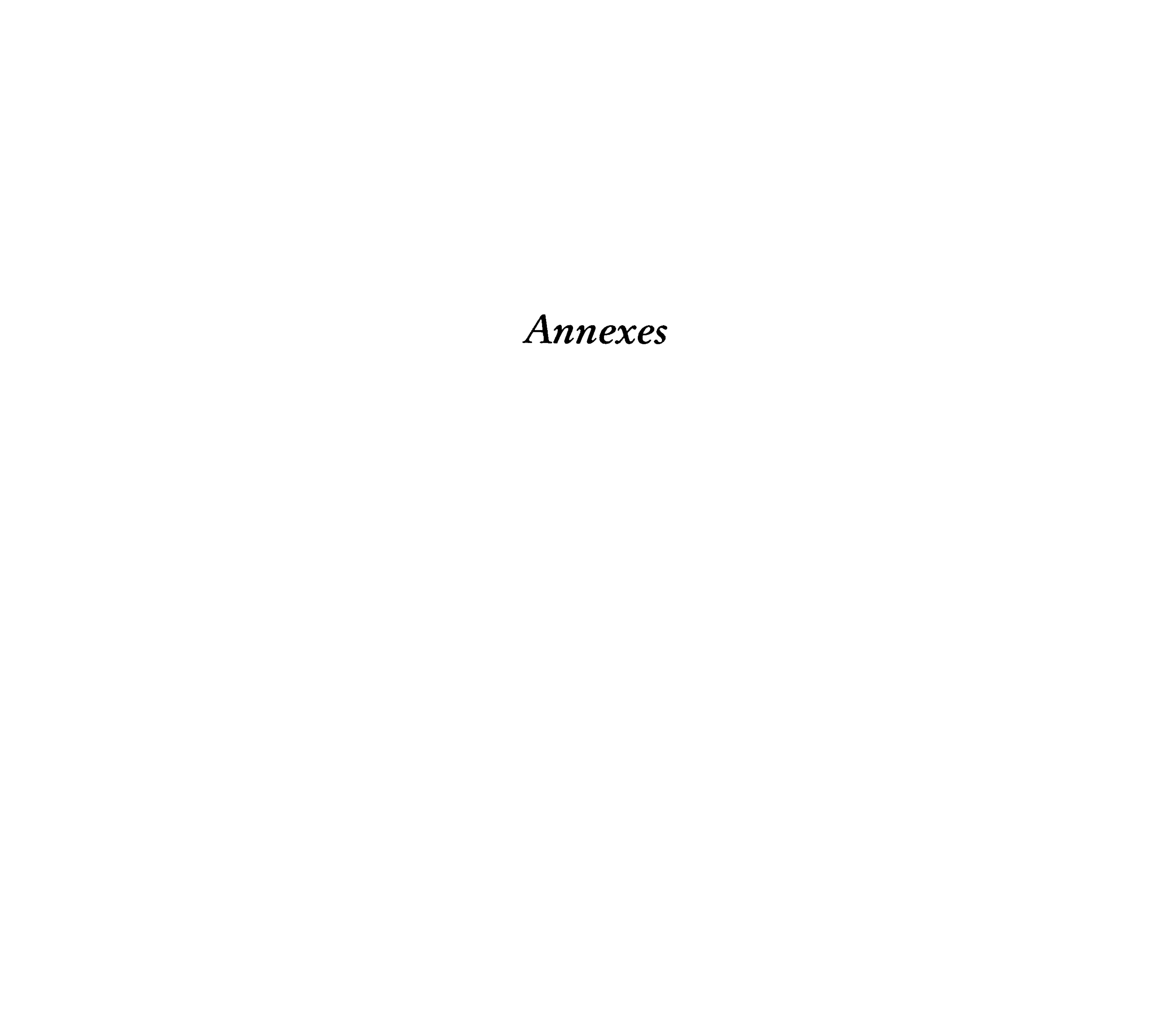
Poutres Vierendeel comme éléments comprimés dans le Millenium Dome, 1999, arch. R. Rogers, ing. bureau Happold



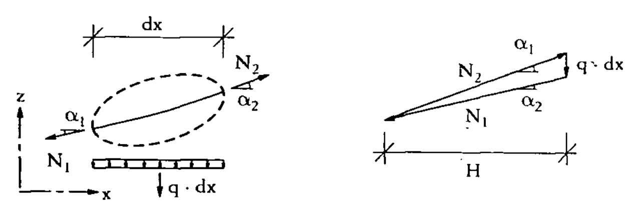
Le « Bigo » à Gênes pour les Célébrations de Colomb, 1992, arch. R. Piano, ing. P. Rice (Ove Arup)



Palais des Sports à Rome, 1957, arch. + ing. P. L. Nervi



Annexes



Elément infinitésimal de câble et polygone des forces

Annexe 1: La détermination analytique de la courbe funiculaire dans le cas du câble soumis à une charge uniformément répartie

Analysons tout d'abord le cas avec une charge uniformément répartie d'intensité constante (cf. p. 41). Considérons un sous-système qui comprend un segment de câble de longueur infinitésimale dx. Sur ses deux extrémités agissent des efforts N_1 et N_2, avec des inclinaisons différentes, parce que la charge qui agit sur l'élément infinitésimal a provoqué une déviation. Comme dans tous les exemples avec charges verticales, la composante horizontale des vecteurs des sollicitations est constante et correspond à la force horizontale aux appuis H. La condition d'équilibre du sous-système infinitésimal conduit à

$$H \cdot (\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1) = q \cdot dx$$

En exprimant $\tan\alpha_1$ comme la première dérivée de la fonction qui décrit la courbe: $\tan \alpha_1 = z'$
et $\tan\alpha_2$ avec l'accroissement de la pente $\tan\alpha_2 = z' + z'' \cdot dx$

on obtient:

$$H \cdot (z' + z'' \cdot dx - z') = q \cdot dx$$

d'où

$$z'' = q/H.$$

La fonction z peut être calculée en intégrant deux fois la constante q/H:

$$z' = q/H \cdot x + C_1$$
et $z = q/H \cdot x^2/2 + C_1 \cdot x + C_2$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration à déterminer en considérant les conditions géométriques aux appuis. La fonction obtenue est une parabole du second degré.
Si les câbles sont sollicités uniquement par leur poids propre et que la section du câble est constante, il faut considérer que le poids de l'élément vaut

$$q \cdot ds$$

où $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx \cdot \sqrt{1 + z'^2}$ est la longueur de l'élément infinitésimal. L'équation différentielle devient donc

$$z'' = \frac{q}{H} \cdot \sqrt{1+z'^2}$$

et la solution est celle de la courbe appelée chaînette

$$z = C_1 \cdot \cosh C_2 x = C_1 \cdot \frac{e^{-c_2 x} + e^{c_2 x}}{2}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes.

Annexe 2: L'expression analytique des conditions d'équilibre

La première condition d'équilibre, selon laquelle « les forces qui agissent sur un sous-système sont en équilibre si elles s'annullent vectoriellement » (cf. pp. 5 et 25), peut être formulée de la façon suivante:

$$\sum \vec{F} = 0$$

où le symbole $\vec{F}$ indique que les forces F sont en réalité des vecteurs. Si l'on considère pour chaque force agissante ses composantes selon un système d'axes définis, l'équation précédente peut être remplacée par le système suivant:

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$

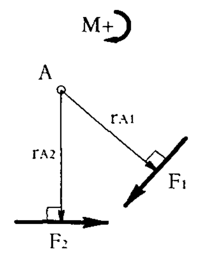
Comme nous l'avons vu, la condition d'équilibre décrite précédemment est nécessaire, mais non suffisante. Il y a en effet une seconde condition d'équilibre: dans le cas de deux forces, il faut qu'elles se trouvent sur la même ligne d'action, alors que dans le cas de trois forces, il faut que les trois lignes d'action correspondantes convergent en un seul point (cf. p. 26).
Pour décrire analytiquement cette condition, il est utile d'introduire la notion de moment. On définit comme *moment* d'une force par rapport à un point de référence, le produit de la force par la distance entre le point de référence et la ligne d'action de la force. Le moment lui aussi est en réalité un vecteur qui est le résultat du produit vectoriel de la force et d'un vecteur $\vec{r}_A$ qui décrit le segment entre le point de référence A et un point quelconque sur la ligne d'action de la force:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

Si toutes les forces agissent dans un plan qui contient aussi le point de référence A, tous les moments sont des vecteurs

perpendiculaires au plan. L'intensité du moment correspond alors au produit scalaire de l'intensité de la force F et de la distance r_A:

$$M_A = r_A \cdot F$$



Le moment (d'une force par rapport à un point)

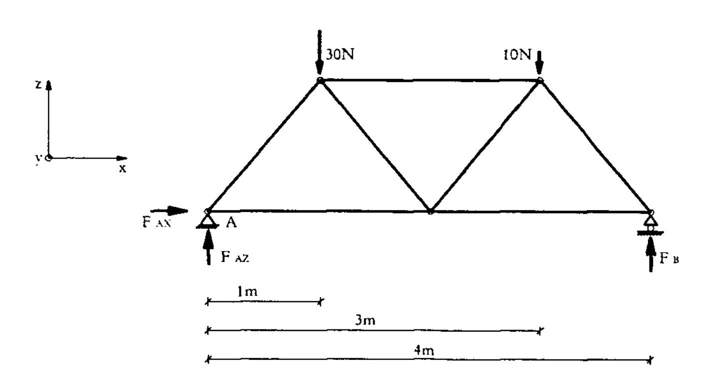
Dans ce cas, il est toutefois nécessaire de définir le sens dans lequel les forces créent un moment positif (implicitement le sens de l'axe perpendiculaire au plan sur lequel se trouvent les forces). Dans l'exemple ci-contre, le moment de la force F_1 par rapport au point A est positif, alors que le moment de la force F_2 est négatif.
La seconde condition d'équilbre peut alors être formulée de la façon suivante: « un sous-système est en équilibre seulement si la somme des moments provoqués par les forces par rapport à un quelconque point de référence A s'annulle ». Ce qui signifie, avec $M_{F,A}$ comme moment provoqué par la force F par rapport au point A:

$$\sum \vec{M}_{F,A} = 0$$

ou bien, si toutes les forces sont dans un même plan:

$$\sum M_{F,A} = 0$$

Il faut remarquer que cette condition d'équilibre, ainsi formulée, vaut non seulement dans le cas de deux ou trois forces, mais aussi pour un nombre quelconque de forces.
Ces expressions analytiques des conditions d'équilibre sont fort utiles dans la recherche de la résultante de forces parallèles ou des forces d'appui de systèmes avec des charges parallèles.
Dans le cas de la structure représentée ci-contre (cf. p. 122), la seconde condition d'équilibre permet de trouver rapidement la force agissant sur l'appui à droite. Si l'on considère comme point de référence un point situé au droit de l'appui à gauche, les deux composantes de la force transmise par cet appui, pour le moment encore inconnues, ne provoquent aucun moment et ne figurent donc pas dans l'équation qui permet de trouver aussitôt la force F_B sur l'appui à droite:



Détermination analytique des forces sur les appuis

$$\sum M_{F,A} = 0 = 1\,[m] \cdot 30\,[N] + 3\,[m] \cdot 10\,[N] - 4\,[m] \cdot F_B$$

d'où $F_B = 15$ [N].

On peut maintenant facilement trouver les forces sur l'appui à gauche au moyen de la première condition d'équilibre. La composante horizontale dérive immédiatement de:

$$\sum F_x = 0 = F_{Ax}$$

alors que la composante verticale peut être obtenue à partir de

$$\sum F_z = 0 = F_{Az} - 30\,[N] - 10\,[N] + F_B$$
$$= F_{Az} - 30\,[N] - 10\,[N] + 15\,[N]$$

d'où $F_{Az} = 25$ [N].
La détermination de la résultante des charges peut être obtenue de la même façon. Dans le schéma ci-contre avec deux charges verticales, la résultante R aussi doit être verticale, et peut être obtenue à partir de

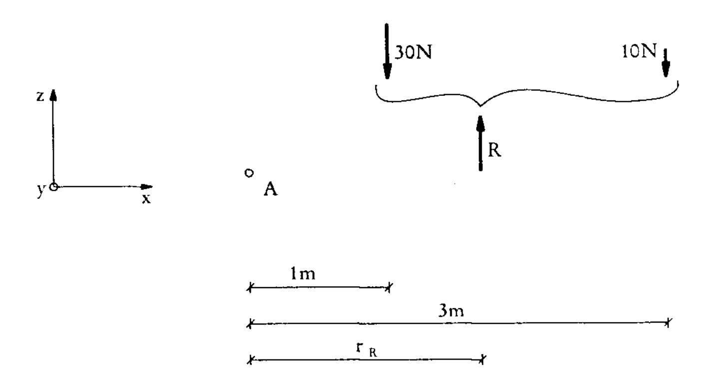
$$\sum F_z = 0 = R - 30\,[N] - 10\,[N]$$

d'où R = 40 N. La position de la ligne d'action de la résultante (distance r_R du point de référence A) peut être déterminée au moyen de

$$\sum M_{F,A} = 0 = 1\,[m] \cdot 30\,[N] - r_R \cdot R + 3\,[m] \cdot 10\,[N]$$

$$= 1\,[m] \cdot 30\,[N] - r_R \cdot 40\,[N] + 3\,[m] \cdot 10\,[N]$$

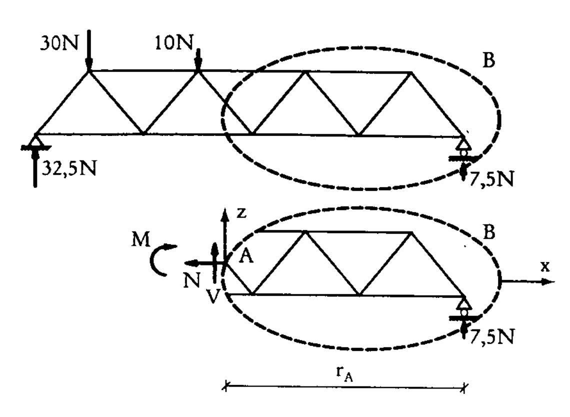
d'où $r_R = 1{,}5$ [m].



Détermination analytique de la résultante des charges

Annexe 3: L'effort normal, l'effort tranchant et le moment de flexion

Dans la statique, il est courant de décrire la résultante des efforts qui agissent là où un sous-système a été isolé au moyen de ses composantes, selon un axe longitudinal et deux axes transversaux. Si les structures et les charges sont dans un même plan, on a un seul axe transversal, lui aussi dans le plan principal, et perpendiculaire à l'axe longitudinal. On définit alors comme *effort normal N* la composante longitudinale de la résultante des efforts et comme *effort tranchant V* la composante transversale (cf. p. 129).
Puisque la résultante des efforts ne passe pas nécessairement par l'axe de référence (dans le cas des poutres on utilise souvent l'axe du centre de gravité comme référence), il faut par conséquent définir une autre grandeur appelée *moment fléchissant M* qui correspond au moment de la résultante des efforts par rapport à l'intersection entre l'axe de référence et la limite du sous-système (cf. p. 126).



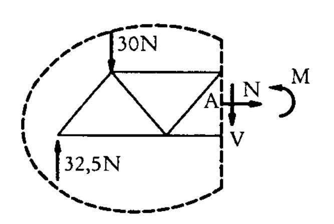
Détermination des efforts N,V et M (cf. p. 125)

Dans l'exemple représenté à la page 125, l'effort normal, l'effort tranchant et le moment fléchissant sont les composantes de la résultante totale de l'effort agissant sur la coupe du sous-système (membrure supérieure, membrure inférieure et diagonales coupées par le sous-système comme représenté ci-contre). Les conditions d'équilibre nous donnent immédiatement les efforts recherchés:

$\sum F_x = 0 = N$ (x est dans ce cas l'axe de référence de la structure)

$\sum F_z = 0 = V + 7{,}5[N]$ d'où l'on obtient $V = -7{,}5$ [N]

$\sum M_{F,A} = 0 = M - r_A \cdot 7{,}5[N]$ d'où l'on obtient $M = r_A \cdot 7{,}5$ [Nm]



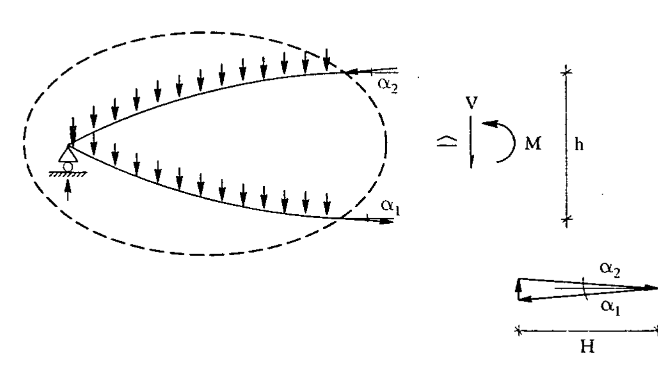
Détermination des efforts N, V et M (cf. p. 128)

Dans la partie droite du treillis, le moment fléchissant correspond au produit de la force d'appui (7,5 N) par la distance de l'appui r_A. Dans cette zone, le moment fléchissant suit donc un tracé linéaire, bien visible dans la figure de la page 126.
Le même procédé peut bien sûr être adopté également quand plusieurs forces agissent sur le sous-système. Dans l'exemple représenté ci-contre (cf. p. 128), on a:

$\sum F_x = 0 = N$

$\sum F_z = 0 = 32{,}5[N] - 30[N] - V$ d'où l'on obtient $V = 2{,}5$ [N]

$\sum M_{F,A} = 0 = 3 \cdot 32{,}5 - 2 \cdot 30 - M$ d'où l'on obtient $M = 37{,}5$ [Nm] (cf. valeur maximale dans la figure à la p. 126)



Détermination des efforts N,V et M dans une structure à poussée funiculaire compensée

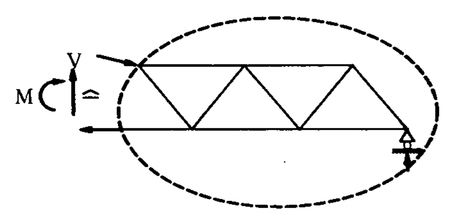
A partir des efforts N, V et M, on peut déterminer les efforts dans l'arc et dans le câble des *structures funiculaires à poussée compensée*, dans les membrures et dans les diagonales des treillis, mais aussi les efforts internes dans les poutres et les cadres.
Comme nous l'avons déjà vu à la page 126, l'allure des moments est similaire à la forme d'une structure funiculaire à poussée compensée. En effet, comme le montre la figure ci-contre, on a

$M = H \cdot h$

où la composante horizontale des efforts H, en présence de charges verticales, est constante sur toute la longueur de la structure. L'effort tranchant V correspond à la composante verticale des efforts dans l'arc et dans le câble:

$$V = H \cdot \left(\overline{\tan}\,\alpha_1 + \tan\alpha_2\right)$$

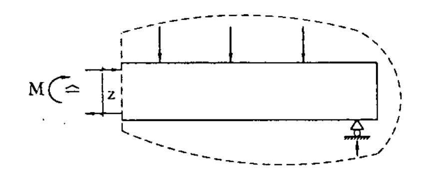
Nous avons déjà vu à la page 129 que l'effort dans la diagonale d'un *treillis à membrures parallèles* peut être déterminé directement à partir de l'effort tranchant *V*. Le moment fléchissant M influence en revanche l'effort dans les membrures (cf. figure ci-contre et à la p. 128):

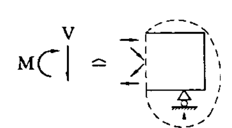


Détermination des efforts dans un treillis

$$N_{membrure} = \pm\frac{M}{h}$$

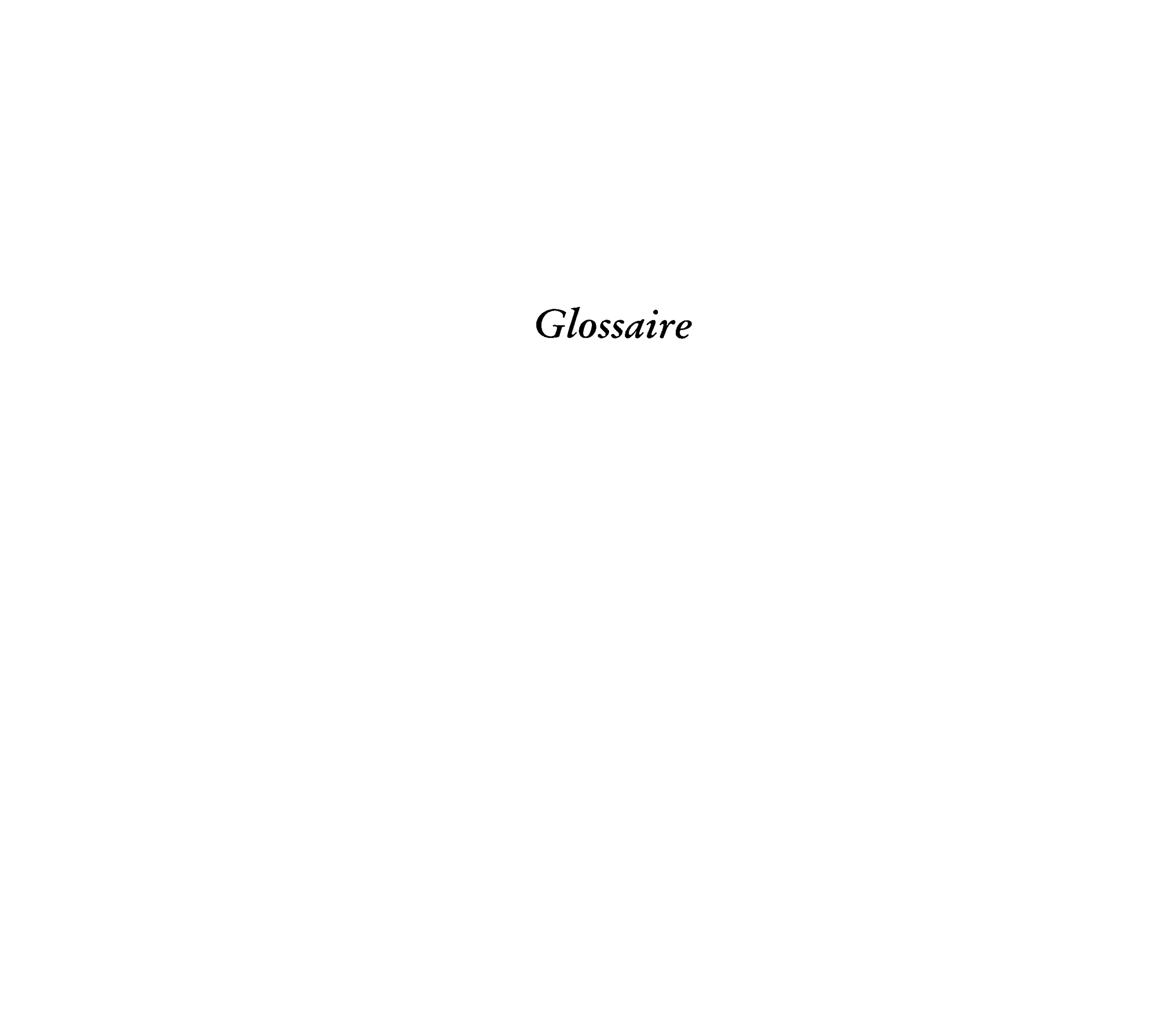
où le signe + vaut pour la membrure inférieure et le signe – pour la membrure supérieure. Plus précisément, cette relation n'est valable que si la limite du sous-système coupe le nœud opposé à la membrure prise en considération. Dans le cas contraire, il faut également tenir compte de l'effet de l'effort tranchant sur les membrures.
Pour les *poutres*, il faut considérer que la distance effective z entre la zone comprimée et la zone tendue est inférieure à la hauteur de la section (cf. p. 168). Avec cette correction, la relation décrite précédemment est encore valable:





Détermination des efforts dans une poutre

$$N_{membrure} = \pm\frac{M}{z}$$



Glossaire

abscisse Axe horizontal d'un diagramme.

abside Construction en forme de demi-cercle ou de polygone, située derrière le chœur et constituant l'extrémité d'une église.

action Force ou déformation imposée agissant sur une structure.

adimensionnel Qui n'a pas d'unité, ex. « valeur adimensionnelle ».

agrégat Ensemble des matériaux inertes entrant dans la composition des mortiers et des bétons.

allure Apparence générale, forme.

angle de frottement Angle maximum possible entre la direction de l'effort de contact entre deux corps et l'axe normal à la surface de contact.

anisotrope Se dit d'une structure ou d'un matériau dont les propriétés varient selon la direction considérée.

appui Support d'une structure.

appui fixe Support d'une structure ou d'un élément structural la bloquant le long de deux axes et permettant sa rotation.

appui mobile Appui d'une structure ou d'un élément de structure qui restreint le déplacement dans une direction et le laisse libre dans la direction perpendiculaire.

arc Elément de structure de forme incurvée portant essentiellement par effort normal de compression.

arc à plein cintre Structure en arc de forme circulaire dont la flèche est égale à la moitié de la portée.

arc auxiliaire Construction auxiliaire permetant de déterminer la position de la résultante de plusieurs forces.

arc brisé Arc formé de deux demi-arcs ou de plusieurs barres s'appuyant l'un sur l'autre; les tangentes au sommet de l'arc faisant un angle plus ou moins aigu.

arc funiculaire Courbe caractéristique de l'axe d'un arc sous une configuration de charges donnée, sollicité uniquement à la compression.

arc-boutant Arc en maçonnerie incliné apte à reprendre une partie de la poussée d'une structure en voûte.

architrave Partie inferieure de l'entablement portant sur deux chapiteaux de colonne.

arête Ligne d'intersection de deux surfaces non coplanaires.

armature Barres métalliques enrobées dans le béton pour reprendre les efforts de traction.

articulation Système de jonction de deux élément permettant leur libre rotation relative.

atmosphère Ancienne unité de pression, correspondant environ à 10^5 [N/m^2].

axe de gravité Ligne reliant les centres de gravité des sections d'une barre.

barre Elément de structure, généralement longiligne, utilisé par exemple dans les treillis.

barre comprimée et fléchie Elément de structure soumis à une compression excentrée.

barre d'armature Barre d'acier reprenant les efforts de traction dans une section en béton armé.

bâtiment Construction permettant d'accueillir des activités humaines.

bois lamellé-collé Matériau composé de lamelles de bois collés les unes sur les autres pour constituer des éléments de structure.

buton Elément de structure en compression.

câble Elément de structure de forme incurvée portant essentiellement par effort normal de traction. Elément de construction constitué de plusieurs fils présentant une résistance à la traction seulement.

câble auxiliaire Construction graphique auxiliaire permetant de déterminer la position de la résultante de plusieurs forces.

câble de bord Câble utilisé au bord d'un réseau de câbles ou d'une membrane pour reprendre les efforts des câbles porteurs et des câbles de prétension.

câble de précontrainte Câble en acier à haute résistance, généralement placé dans le béton et mis en tension de façon à induire des efforts de compression favorables au comportement d'une structure en béton.

câble de prétension Câble secondaire dont la fonction est d'introduire une prétension dans le câble principal, dans le but de le stabiliser.

câble porteur Elément d'une structure en câble qui reprend les charges et les actions d'autres éléments de structure et les transmet aux appuis.

câble stabilisant Elément d'une structure en câbles qui a pour fonction de stabiliser la structure. On dit aussi câble stabilisateur. Les câbles de prétension sont des câbles stabilisants.

cadre Elément structural plan composé d'un élément plus ou moins horizontal (poutre) connecté de manière rigide à deux ou plusieurs éléments verticaux (piedroits).

centre de gravité Point d'application de la résultante des forces de gravitation appliquées à un corps.

centre de masse Voir centre de gravité.

chaînette Courbe suivie sous l'effet de son poids propre par un câble de section constante tenu à ses deux extrémités.

charge critique Charge au-delà de laquelle une pièce comprimée présente des déformations latérales excessives et une perte de stabilité.

charge de calcul voir charge de dimensionnement.

charge de dimensionnement Charge pour laquelle on effectue le dimensionnement. Elle correspond à la somme de toutes les chages majorées par les facteurs de charge.

charge de service Charge agissant sur une structure à l'état de service.

charge linéaire Charge uniformément répartie le long d'une ligne ou de l'axe d'un élément linéaire.

charge majorée Charge dans laquelle on a tenu compte de la majoration par les coefficients partiels de charge, en vue du dimensionnement. Voir aussi charge de dimensionnement.

charge ponctuelle Force agissant en un point et sollicitant la structure.

charge répartie Force distribuée agissant sur une structure sur une longueur ou une surface donnée.

charge uniformément répartie Charge répartie de manière constante sur une structure linéaire ou bidimensionnelle.

charge utile Charge soutenue par une structure en plus de son propre poids. La charge utile peut être permanente (p. ex. une épaisseur de terre) ou variable (p. ex. le poids des personnes).

charge variable Charge agissant sur une structure de manière non permanente, et dont l'intensité n'est pas nécessairement constante.

choc Action accidentelle due à l'interaction entre un corps en mouvement et la structure ou une partie de celle-ci.

cintre Elément de charpente soutenant les voussoirs pendant la construction d'un arc ou d'une voûte. Par extension, élément ayant la même fonction lors du coulage du béton d'une structure.

clé Zone centrale fermant un arc ou une voûte.

coefficient de dilatation thermique Constante physique caractérisant le changement de longueur, de surface ou de volume d'un corps soumis à une variation de température.

coefficient de frottement Rapport de la force de frottement à la composante de la force de contact agissant perpendiculairement aux deux surfaces de contact.

colonne Elément de construction vertical apte à reprendre des efforts de compression.

compression Action de comprimer et effort qui provoque un raccourcissement.

conoïde Surface à double courbure générée par la rotation d'une courbe autour d'un axe de rotation.

console Elément de soutien horizontal dont une extremité est libre et l'autre constitue l'appui (encastrement).

constructeur Personne qui possède la formation et les compétences pour mener à terme un projet de construction, de sa phase d'étude et de calcul jusqu'à la réalisation. Activité actuellement séparée entre architecte et ingénieur civil.

contrainte Grandeur qui caractérise l'intensité de la sollicitation dans un matériau, définie comme l'effort par unité de surface. Symbole : σ (sigma).

contrainte de compression Contrainte qui cause un raccourcissement du matériau.

contrainte de traction Contrainte qui cause un allongement du matériau.

contrefort Elément de structure en forme de colonne trapue apte à reprendre des efforts de compression inclinés.

contreventement Elément de construction destiné à reprendre les charges transversales ou à stabiliser les éléments comprimés.

coque Structure de surface incurvée.

corde Ligne droite reliant les appuis d'un arc ou d'un câble.

coupole Structure à surface à double courbure, générée par rotation d'un arc autour d'un axe passant par la clé.

courbe enveloppe Courbe englobant les polygones funiculaires de plusieurs configurations de charge.

cure Ensemble des moyens mis en œuvre après le bétonnage afin de limiter les problèmes de fissuration.

dalle Elément de structure plan chargé par des forces perpendiculaires à son plan.

dalle de roulement Dalle d'un pont sur laquelle agissent les charges des personnes et/ou des véhicules.

déformation Changement de forme du matériau sous forme d'allongement ou de raccourcissement.

déformation admissible Déplacement ou déformation de structure, ou d'un élément de structure, qui est toléré pour le cas d'utilisation considéré.

déformation plastique Déformation irréversible.

déformation unitaire Rapport entre la déformation et la longueur initiale. Symbole : ε. On dit aussi déformation spécifique.

déformée critique Forme que prend une structure sous sa charge critique.

déplacement Mouvement d'un corps.

détendu Se dit d'un câble qui n'est pas sous tension, et qui ne participe donc pas à la structure porteuse.

diagonale Elément oblique reliant les membrures inférieure et supérieure d'un treillis.

diagramme de Cremona Construction graphique obtenue en composant plusieurs polygones des forces.

diaphragme Elément de raidissement d'une structure à parois minces.

dilatation thermique Augmentation de longueur, surface ou volume d'un corps soumis à une élévation de température.

dimensionnement Détermination des dimensions, des matériaux et des détails constructifs d'une structure porteuse.

direction Ligne définissant l'orientatation de l'action d'une force dans un plan ou dans l'espace.

dolomie Roche sédimentaire contenant du carbonate, dont la moitié au moins sous forme de dolomite.

ductile Se dit d'un matériau ou d'un élément de structure qui peut subir de grandes déformations plastiques avant d'atteindre la rupture.

ductilité Capacité d'un matériau ou d'un élément de structure de subir des déformations plastiques avant d'atteindre la rupture.

dynamique La partie de la mécanique qui s'applique aux corps en mouvement.

écoulement Phénomène qui se manifeste dans un matériau ductile lorsque les sollicitations dépassent la limite élastique, et que se produisent des déformations plastiques. On parle alors de *limite d'écoulement.*

écrouissage — Phase du comportement mécanique de l'acier dans laquelle le matériau est soumis à des déformations plastiques importantes, qui a pour cause une nouvelle augmentation de la contrainte, après le plateau plastique.

édifice — Toute construction ou ouvrage d'art.

effondrement — Rupture d'une structure sous l'action des charges.

effort — Force qui agit sur une coupe d'un sous-système.

effort axial — Voir effort normal.

effort de compression — Effort normal tendant à raccourcir l'élément qui le subit.

effort de traction — Effort normal tendant à allonger l'élément qui le subit.

effort normal — Composante perpendiculaire à la section de l'effort agissant sur un élément structural.

effort tranchant — Composante parallèle à la section de l'effort agissant sur un élément structural.

élancement — Dans un arc ou un câble, rapport entre la portée et la flèche; dans une poutre ou un cadre, rapport entre la portée et la hauteur de la section.

élasticité — Propriété d'un matériau ou d'un corps solide de retrouver sa forme initiale après déchargement.

élément de contraste — Elément de structure s'opposant à un déplacement et transmettant la composante correspondante. Exemple : arc boutant ou tirant dans un arc à poussée compensée.

élévation — Vue de coté d'une structure.

encastrement — Appui dans lequel la rotation est empêchée.

encorbellement ou porte-à-faux — Partie d'une construction faisant saillie hors de l'aplomb des appuis.

entaille — Incision pratiquée dans un élément.

entre-axe — Distance entre l'axe d'éléments semblables, répétés plusieurs fois.

équilibre — Situation stable dans laquelle un système ne présente aucune tendance à se déplacer.

état limite de service — Etat limite correspondant à l'utilisation d'une structure.

état limite ultime — Etat limite correspondant à la résistance ultime (maximale) d'un structure.

étayage — Système de soutien par éléments comprimés, généralement temporaire. On utilise par exemple un étayage pour soutenir le coffrage d'une structure en béton avant que celui-ci ne durcisse.

excentricité — Distance entre un point et un axe, par extension, entre la ligne d'action d'une force et l'axe de l'élément de structure auquelle elle s'applique.

extrados — Surface supérieure d'une structure.

extrusion — Procédé de production de barres prismatiques par extrusion au travers d'un masque de forme.

facteur de charge — Facteur de sécurité appliqué aux charges pour les majorer afin de tenir compte de l'incertitude de ces dernières.

facteur de résistance — Facteur de sécurité appliqué aux résistances pour les réduire afin de tenir compte de l'incertitude de ces dernières.

faîte — Arête sommitale d'un toit.

fatigue — Phénomène résultant de très nombreuses (10^6 cycles) sollicitations cycliques, régulières ou variables dans un élément de structure. Se dit aussi du mode de rupture qui en résulte.

ferme — Elément structurel principal d'une charpente.

flambage — Fléchissement latéral, important et brusque d'une pièce élancée sous l'effet d'une compression axiale provoquant l'instabilité.

flèche — Distance verticale entre la clé et la corde d'un arc, ou distance verticale entre le point bas et la corde d'un câble.

flexion — Sollicitation de compression et traction dans une poutre provoquant une courbure.

fluage — Le fluage du béton est l'augmentation graduelle dans le temps de sa déformation relative sous une contrainte appliquée.

force — Toute cause capable de modifier le mouvement, la direction ou la vitesse d'un corps.

force axiale — Force longitudinale sur un élément de structure, agissant à son centre de gravité.

force de gravitation Force appliquée à tout corps soumis à l'attraction gravitationnelle. Synonyme : poids.

force d'inertie Force de réaction d'une masse soumise à une accélération.

fragile Se dit d'un matériau ou d'un élément de structure qui n'a pas la capacité de se déformer plastiquement et qui est sujet à une rupture soudaine.

fragilité Tendance à la rupture d'un matériau ou d'un élément de structure sans déformation plastique.

frottement Force s'opposant au glissement relatif entre deux corps qui s'appuient l'un contre l'autre. La force de frottement dépend de la nature des surfaces de contact.

génératrice Ligne générant une surface par sa rotation ou sa translation.

géométrie d'équilibre stable Dans les câbles, configuration pour laquelle les efforts sont en équilibre avec les charges et les forces sur les appuis. Elle correspond au polygone funiculaire des charges.

glissement Mouvement relatif parallèlement à la surface de contact entre deux corps.

grille de poutres Structure composée de poutres qui se croisent.

hauban Tirant, généralement en acier, pour soutenir une toiture ou le tablier d'un pont, ou encore pour ancrer les forces dans le sol.

haubané Se dit d'un élément de structure ou d'une structure soutenu par un ou plusieurs haubans.

hyperstatique Se dit d'une structure où les efforts ne sont pas définissables sur la seule base de la géométrie et des charges appliquées, mais dépendent également du comportement mécanique des éléments qui la composent et de déplacements ou déformations imposés.

instabilité Phénomène d'augmentation de la déformation transversale en présence d'un effort de compression et pouvant conduire à la ruine.

intensité Magnitude d'une force ou d'un effort.

intrados Surface inférieure d'une structure.

isostaticité Propriété d'une structure dont on peut déterminer les efforts en fonction de la géométrie et des charges uniquement.

isostatique Se dit d'une structure dont on peut déterminer les efforts en fonction de la géométrie et des charges uniquement.

isotrope Se dit d'un matériau ou d'une structure dont les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions.

labile Se dit d'une structure dans un état d'équilibre qui dépend de la géométrie et de la configuration des charges.
Voir métastable.

laminage Procédé de production de barres ou tôles métalliques à chaud ou à froid, par passage entre deux cylindres lisses ou cannelés.

lanterneau Ouverture dans la toiture d'un édifice qui permet à la lumière du jour d'éclairer son intérieur.

lenticulaire En forme de lentille bi-convexe, de fuseau.

ligne de crête Arête supérieure d'une structure plissée, d'une coque ou d'une membrane formée de plusieurs éléments.

ligne des pressions Ligne selon laquelle agit l'effort d'un élément comprimé. Elle correspond au polygone funiculaire des charges.

linéaire Se dit de la relation entre deux propriétés directement proportionnelles.

longueur de flambage Longueur d'une colonne bi-articulée qui présente la même charge critique que la colonne donnée. C'est la longueur entre deux points d'inflexion de la déformée d'une barre comprimée.

maçonnerie de soutènement Maçonnerie placée au-dessus d'un arc et qui a comme fonction de le stabiliser.

matériau composite Se dit d'un matériau composé de plusieurs matières différentes.

matériau élastique Matériau dont les propriétés mécaniques sont réversibles.

mécanique des structures Partie de la physique qui traite du comportement des structures.

mécanisme Système instable dans lequel se produit un mouvement cinématique.

membrane Elément structural constitué d'une toile sollicitée exclusivement à la traction.

membrure Elément longitudinal supérieur ou inférieur d'un treillis.

membrure inférieure Elément longitudinal inférieur d'un treillis.

membrure supérieure Elément longitudinal supérieur d'un treillis.

métastable Se dit d'un état d'équilibre provisoirement stable.

mi-portée Milieu de la portée.

modèle de structure Représentation mécanique simplifiée d'une structure pour en étudier le comportement.

module d'élasticité Rapport entre la contrainte et la déformation unitaire d'un matériau, définissant sa rigidité.

module de Poisson Rapport entre la déformation transversale et la déformation longitudinale sous une charge axiale. Ce rapport, appelé coefficient de Poisson, est une caractéristique du matériau.

moment Produit d'une force par une distance.

moment de flexion Effort composé de traction et de compression provoquant une flexion.

moment de torsion Effort provoquant une torsion d'un élément de structure autour de son axe longitudinal.

moment d'inertie Grandeur relative à une section quantifiant la rigidité de celle-ci. Il est égal à la somme des produits de chaque aire élémentaire, obtenue par subdivision, par le carré de sa distance à un axe situé dans le même plan.

moment fléchissant Voir moment de flexion.

montant Barre verticale d'un treillis reliant les membrures inférieure et supérieure.

naissance Base d'une voûte ou d'un arc; endroit où commence la cambrure. Zone de contact entre l'appui et l'arc ou la voûte.

nef Partie centrale d'une église de plan allongé, allant du portail jusqu'au chœur.

nervure Renforcement sous forme de poutre d'un dalle ou d'une coque.

Newton Unité de mesure d'une force ou d'un effort (symbole [N]), correspondant à 1 kg m/s^2, du nom du célèbre physicien Isaac Newton, 1643-1727.

nœud Point de convergence des barres d'un treillis.

noyau Elément vertical rigide reprenant les efforts horizontaux d'un bâtiment et le stabilisant.

ondulé Qui présente des ondulations.

ordonnée Axe vertical d'un diagramme.

ossature Structure porteuse.

panne Structure secondaire, généralement en bois ou en acier, pour transmettre les efforts de la toiture à la structure porteuse principale.

paraboloïde hyperbolique Surface de rotation générée par des droites. Sa coupe peut être aussi bien parabolique qu'hyperbolique selon la position du plan de coupe.

parcours des structures Séquence de progression dans ce livre. Le parcours des structures passe progressivement des structures les plus simples aux structures les plus complexes.

paroi Elément de structure plan et vertical.

Pascal Unité de mesure de la pression (symbole [Pa]), corespondant à 1 N/m^2, utilisée comme unité de mesure d'une contrainte ou d'une charge répartie sur une surface, du nom du célèbre physicien Blaise Pascal (1623-1662).

pile Elément de structure généralement vertical qui supporte un pont.

pilier Elément de structure vertical en pierre, brique ou béton armé, qui supporte la structure d'un édifice.

pinacle Elément placé en tête des contreforts d'une cathédrale.

plaque Voir dalle.

plastification Phase du comportement mécanique d'un matériau ou d'une structure dans laquelles les déformations ne sont plus complètement réversibles.

poids propre Poids de la structure porteuse.

point d'application Point où agit une force.

point d'inflexion Point d'une courbe où se passe un changement de courbure.

polygone des forces Représentation graphique d'un ensemble de forces en équilibre.

polygone funiculaire des charges Forme d'une structure simplement tendue ou comprimée en équilibre avec les charges.

portée Distance entre les appuis consécutifs d'un élément de structure.

portée libre Espace entre deux appuis ou éléments de support consécutifs.

poussée Composante horizontale de la force d'appui d'un arc ou d'une voûte.

poussée du vent Charge provoquée par le vent.

poutre Elément de structure de forme prismatique principalement sollicité à la flexion.

poutre de câbles Structure plane composée d'un câble porteur, d'un câble de prétension et d'éléments de liaison.

poutre de raidissement Poutre qui apporte une rigidité supplémentaire à un arc ou à une structure suspendue.

poutre triangulée Voir treillis.

poutre-cloison Poutre caractérisée par un élancement très faible, typiquement inférieur à 3.

précontrainte Dispositif constructif permettant l'introduction d'efforts de compression dans le béton armé au moyen de câbles en acier sous tension.

raidisseur Elément de rigidification principalement utilisé en construction métallique afin d'empêcher l'instabilité de parois minces.

réduction des forces Remplacement de plusieurs forces par leur résultante.

relaxation Diminution graduelle des contraintes dans le temps dans un élément en béton ou en acier soumis à des déformations imposées.

réseau de câbles Système de câbles dans l'espace formant une surface porteuse. Les câbles d'une direction sont porteurs, alors que ceux de l'autre sont des câbles de prétension.

résistance Valeur maximale de l'effort ou de la contrainte qu'un élément de structure ou un matériau peut reprendre avant de se rompre.

résistance caractéristique Valeur statistiquement fiable de la résistance.

résistance de dimensionnement Résistance avec laquelle on effectue le dimensionnement. Elle correspond à la résistance caractéristique réduite par le facteur de résistance.

résultante Force de remplacement, dont l'action équivaut à celle du système de forces considéré.

réticulé En forme de treillis.

retrait Diminution de longueur du bois ou du béton, due principalement à une perte d'humidité.

rigidifié Se dit d'un élément de structure auquel sont ajoutés d'autres éléments permettant d'en diminuer les déformations.

rigidité Propriété d'un élément de structure ou d'un matériau, exprimée comme le rapport entre la charge ou contrainte qui lui est appliquée et la déformation ou déformation unitaire qui en résulte.

rigidité flexionnelle Rigidité d'une poutre ou d'une dalle fléchie.

rotule Voir articulation.

rupture Etat dans lequel un matériau ou une structure perd sa résistance après l'avoir atteinte.

secteur sphérique Secteur de sphère, forme de certaines coupoles.

section Surface obtenue en coupant un volume ou un élément par un plan. Dans le cas des structures linéaires (câbles, arcs, poutres), ce plan est généralement perpendiculaire à l'axe de gravité.

séisme Voir tremblement de terre.

sollicitation Effort dans un élément de structure ou contrainte dans un matériau. On dit aussi effet d'action.

sollicitation de compression Sollicitation causant causant le raccourcissement d'un matériau ou d'un élément de structure.

sollicitation de traction Sollicitation causant causant l'allongement d'un matériau ou d'un élément de structure.

solliciter Provoquer des sollicitations par le biais de charges ou de déformations imposées.

sous-système Partie d'un système qui est isolé du reste, avec toutes les forces et efforts qui y agissent.

stabilité Propriété d'un corps ou d'une structure de rester dans sa position d'équilibre. Branche de la statique qui est dédiée à l'étude de la stabilité et de ses conditions.

statique appliquée Partie de la mécanique qui s'applique aux corps en état d'équilibre et sans mouvement.

structure funiculaire à poussée compensée Structure composée de deux éléments funiculaires, l'un tendu et l'autre comprimé, dans laquelle les poussées sur les appuis se compensent.

structure hyperstatique Structure dans laquelle les appuis sont en nombre supérieur à celui strictement nécessaire pour assurer l'équilibre.

structure isostatique Structure dans laquelle les appuis sont en nombre exactement suffisant pour assurer l'équilibre.

structure pneumatique Structure constituée d'une membrane (et parfois de câbles de prétension) dans laquelle la surpression interne de l'air reprend les charges.

structure porteuse Ossature d'une construction reprenant les charges et les transmettant aux appuis.

succion Pression négative sur une surface, exercée par exemple par l'écoulement du vent.

surface
1. Etendue qui définit le contour d'un corps.
2. Superficie.

suspente Câble généralement vertical servant à suspendre un élément de structure au reste de la structure.

tablier Structure continue de support de la surface de circulation d'un pont.

tassement Déplacement vertical du sol d'appui sous les charges qui lui sont appliquées. Les tassements se produisent en partie au cours du temps.

tasser
1. Comprimer un sol, un terrain, pour le rendre plus stable.
2. Se déplacer, en parlant d'une structure appuyée sur un sol qui tasse.

tente Structure spatiale en matière textile sollicitée uniquement à la traction. Semblable à un réseau de câbles dans lequel les câbles se toucheraient.

tirant Elément de structure en traction.

toit Partie supérieure d'un bâtiment ou d'une structure, servant à le couvrir.

toiture Structure ou surface qui a pour fonction de couvrir et protéger une construction, un bâtiment.

tôle laminée Tôle produite par laminage.

torsion Action de tordre, effort qui provoque une rotation autour de l'axe de gravité.

tour Structure verticale de grande hauteur par rapport à sa base.

tourillon Pièce mécanique servant d'axe de rotation entre deux éléments dotés d'un trou.

traction Action de tirer, effort qui provoque un allongement.

treillis Structure constituée de barres disposées selon une maille triangulaire et sollicitées principalement à la traction ou à la compression.

tremblement de terre Secousse tellurique engendrant des accélérations alternatives horizontales et verticales. Se dit aussi séisme.

tympan Mur en maçonnerie au-dessus d'un arc ou d'une voûte.

valeur de dimensionnement de la résistance Résistance d'un matériau réduite par le facteur de sécurité correspondant.

valeur de dimensionnement de la sollicitation Sollicitation d'un élément amplifiée par le facteur de charge correspondant.

vecteur Segment de droite orienté formant une entité mathématique; il s'agit d'une grandeur indicatrice d'une direction et d'une amplitude.

voussoir Pierre taillée présentant deux faces sur des plans convergents, avec laquelle on construit un arc. Terme également utilisé pour les éléments longitudinaux consécutifs d'une structure préfabriquée.

voûtain Elément de la voûte, de forme semi-sphérique, s'élevant sur un édifice à plan carré.

voûte Structure incurvée à surface à simple courbure.

voûte d'arêtes Voûte résultant de l'intersection de deux ou plusieurs voûtes en berceau dans laquelle les parties inférieures sont éliminées.

voûte en berceau Voûte dont la surface est un cylindre continu, engendré par la translation d'un arc suivant un axe rectiligne perpendiculaire à son plan.

voûte en éventail Voûte formée de plusieurs conoïdes (surface à double courbure générée, par rotation autour d'un axe, d'une courbe génératrice) disposés les uns à côtés des autres.

voûte en pavillon Voûte résultant de l'intersection de deux ou plusieurs voûtes en berceau dans laquelle les parties supérieures sont éliminées.

Bibliographie

Mécanique et statique des structures, analyse

Studer M.-A., Frey F., *Introduction à l'analyse des structures*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1999

Frey F., *Analyse des structures et milieux continus, statique appliquée*, Traité de génie civil, volume 1, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1998

Frey F., *Analyse des structures et milieux continus, mécanique des structures*, Traité de génie civil, volume 2, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2000

Frey F., *Analyse des structures et milieux continus, mécanique des solides*, Traité de génie civil, volume 3, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1998

Frey F., Studer M.-A., *Analyse des structures et milieux continus, coques*, Traité de génie civil, volume 5, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2003

Pizzetti G., *Principi statici e forme strutturali*, UTET, Torino, 1980

Approche qualitative et intuitive de la compréhension du comportement des structures, conception

Torroja Miret E., *Razon y ser de los tipos structurales*, 1957 (édition récente: Consejo Superior de Investigationes Cientificas, Madrid, 2000; édition française: *Les structures architecturales, leur conception, leur réalisation*, Eyrolles, Paris, 1969; édition italienne: *La concezione strutturale*, Cittàstudi edizioni, Milano, 1995)

Salvadori M., Heller R., *Structures in Architectures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 1963 (édition française: *Structures et Architecture*, Eyrolles, Paris, 1976; édition italienne: *Le strutture in architettura*, Etaslihbri, Milano, 1992)

Nervi P. L., *Costruire correttamente*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1965 (édition française: *Savoir construire*, Le Linteau, Paris, 1997)

Gordon J. E., *Structures, or why things don't fall down*, Plenum Press, New York, 1978 (édition italienne: *Strutture, ovvero perché le cose stanno in piedi*, Mondadori, Milano, 1979)

Gordon J. E., *The Science of Structures and Materials*, Scientific American Books, New York, 1988 (édition italienne: *Strutture sotto sforzo*, Zanichelli, Bologna, 1991)

Approche basée sur la statique graphique, conception

Zalewski W., Allen E., *Shaping Structures: Statics*, Ed. John Wiley and Sons, New York, 1998

Structures à mi-chemin entre ingénierie et architecture

Ackermann K., *Tragwerke in der konstruktiven Architektur*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1988

Billington D. P., *The Tower and the Bridge, the new art of structural engineering*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983

Deswarte S., Lemoine B., *L'architecture et les Ingénieurs*, Le Moniteur, 1997

Mark R., *Light, Wind and Structure*, MIT Press, 1990

Mock E. B., *The Architecture of Bridges*, The Museum of Modern Art, New York, 1949

Picon A., *L'art de l'ingénieur, constructeur, entrepreneur, inventeur*, Editions du Centre Pompidou/Le Moniteur, Paris, 1997

Robbin T., *Engineering a New Architecture*, Yale University Press, New Hawen and London, 1996

Siegel C., *Strukturformen der modernen Architektur*, Callwey, München, 1960

Types de structures

Angerer F., *Bauen mit tragenden Flächen*, Callwey, München, 1960

Frei O., *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Ullstein Verlag, 1966

Heinle E., Leonhardt F., *Türme aller Zeiten, aller Kulturen*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1990

Heinle E., Schlaich J., *Kuppeln aller Zeiten, aller Kulturen*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1996

Ishii K., *Membrane Structures in Japan,* SPS Publishing Company, Tokyo, 1995

Joedicke J., *Schalenbau*, Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1962

Leedy W. C., *Le volte a ventaglio*, Le Scienze, Milano, avril 1983

Leonhardt F., *Brücken/Bridges, Aestetik und Gestaltung, Aesthetics and Design*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1982

Mierop C., *Skyscrapers, higher and higher*, Norma, Paris, 1995

Rice P., Dutton H., *Le verre structurel,* Le Moniteur, Paris, 1995

Van Beek G. W., *Archi e volte nell'antico Vicino Oriente*, Le Scienze, Milano, septembre 1987

Réflexions d'ingénieurs et architectes

Freyssinet E., *Un amour sans limite*, Editions du Linteau, Paris, 1993

Nervi P. L., *Scienza o arte del costruire?*, 1945, (édition récente: Cittàstudi Edizioni, Milano, 1997)

Nervi P. L., *Nuove strutture*, Edizioni di Comunità, Milano, 1963

Rice P., *An Engineer imagines*, Artemis, London, 1994.

Piano R., *Giornale di bordo*, Passigli Editore, Firenze, 1997

Wachsmann K., *Wendepunkt im Bauen*, Rowohlt, 1962

Ingénieurs et architectes

Bill M., *Robert Maillart*, Artemis Verlag, Zürich, 1949

Billington D. P., *Robert Maillart's Bridges, the art of engineering*, Princeton University Press, New Jersey, 1979

Boaga G., *Riccardo Morandi*, Zanichelli Editore, Bologna, 1984

Brownlee D.B., De Long D.G., *Louis I. Kahn: in the realm of architecture*, Museum of contemporary Art, Los Angeles, 1991

Buchanan P., *Renzo Piano Building Workshop*, Phaidon, London, 1993-1998

Candela F., Segui Buenaventura M., *Felix Candela, arquitecto*, catalogue d'exposition, Instituto Juan de Herrera, Madrid, 1994

Desideri P., *Pier Luigi Nervi*, Zanichelli, Bologna, 1979

Dieste E., *Eladio Dieste 1943-1996*, Junta de Andalucia, Sevilla, 1998

Dini M., *Renzo Piano*, Electa, Milano, 1983

Dunster D., *Arups on Engineering*, Ernst&Sohn, Berlin, 1996

Fernandez Ordonez S. A., *Eugène Freyssinet*, 2C Editions, Barcelona, 1979

Fernandez Ordonez S. A., Navarro Vera J. R., *Eduardo Torroja, Ingeniero*, Ediciones Pronaos, Madrid, 1999

Guidot R., Guiheux A., *Jean Prouvé, constructeur*, Editions du Centre Pompidou, Paris, 1990

Holgate A., *The art of structural engineering the work of Jörg Schlaich and his team*, Axel Menges, Stuttgart, 1997

Imbesi G., Morandi M., Moschini F., *Riccardo Morandi, Innovazione, Tecnologia, Progetto*, Gangemi Editore, Roma 1995

Killer J., *Die Bauwerke der Baumeister Grubenmann*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1985

Loyrette H., *Gustave Eiffel*, Deutsche Verlagsanstalt, Fribourg 1985

Marrey B., *Nicolas Esquillan, un ingénieur d'entreprise*, Picard éditeur, Paris, 1992

Nardi G., *Angelo Mangiarotti*, Maggioli Editore, Rimini, 1997

Pawley M., *Norman Foster*, Rizzoli, Milano, 1999

Pedretti C., *Leonardo Architetto*, Electa, Milano, 1988

Pfeiffer B.B., *Frank Lloyd Wright*, Taschen, Köln, 1991

Polano S., *Santiago Calatrava*, Electa, Milano, 1996

Ramm E., Schunck E., *Heinz Isler - Schalen*, Krämer, 1986

Rui-Wamba J. *et al.*, *Eugène Freyssinet, Un ingeniero revolucionario*, Fundacion Esteyco, 2003

Schulze F., *Mies van der Rohe*, Museum of Modern Art, New York, 1989

Stüssi F., *Othmar H. Amman, Sein Beitrag zur Entwicklung des Grossbrückenbaus*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1974

Suchov V., Graefe R., Gappoev M., Pertschi O., *Die Kunst der sparsamen Konstruktion*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1992

Villa A., *Silvano Zorzi*, Electa, Milano, 1995

Von der Mühl H.R., *Kenzo Tange*, Zanichelli, Bologna, 1981

Histoire de la construction

Adam J.-P., *La construction romaine, matériaux et techniques*, Picard, Paris, 1984 (édition italienne: *L'arte di costruire presso i romani, materiali e tecniche*, Longanesi, Milano, 1988)

Jesberg P., *Die Geschichte der Ingenieurbaukunst*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1996

Lamprecht H.-O., *Opus caementitium, Bautechnik der Römer*, Beton-Verlag, Düsseldorf, 1984

Peters, T. F., *Transition in engineering, Guillaume Henri Dufour and early 19th century cable suspension bridges*, Birkhauser, Basel, 1987

Structures traitées dans ce volume

The Golden Gate Bridge, Highway and transportation district, San Francisco, 1937/1987

Boesiger W., *Le Corbusier Œuvre complète, 1952-1957*, Les Editions d'Architecture, Zurich, 1970

Coll. d'auteurs, *Louis Kahn: la costruzione del Kimbell Art Museum*, Accademia di Architettura, Mendrisio, 1997

D'Arcy W. Thompson, *Crescita e Forma*, Bollati Boringhieri, Torino, 1992

De Bures C., *La tour de 300 mètres*, Editions André Delcourt, Paris, 1998

Eggen A. P., Sandaker B. N., *Stahl in der Architektur*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1996

Le Corbusier, *Mein Werk*, Verlag Niggli, Teufen, 1960

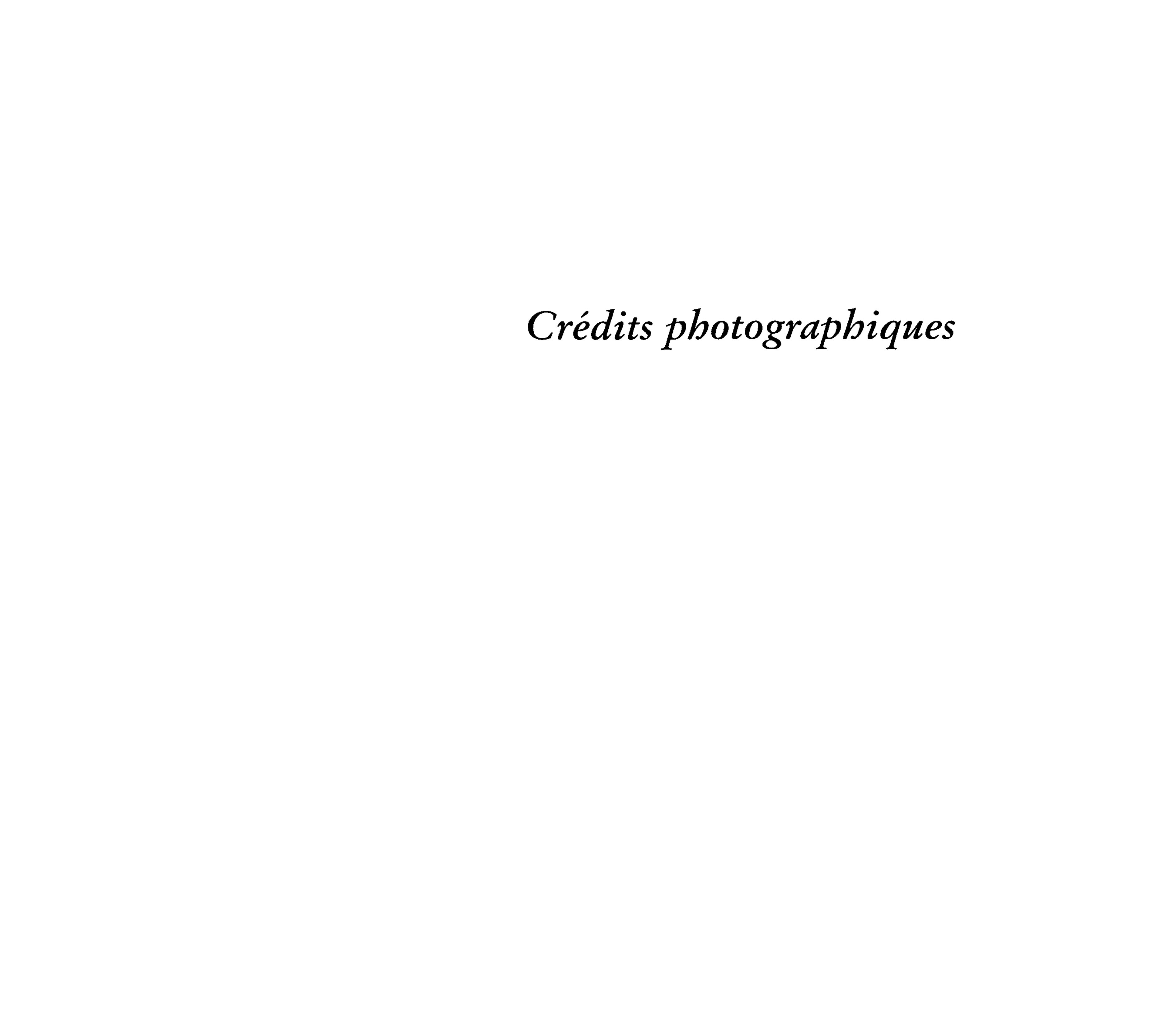
Lyall S., *Masters of Structures*, Kohlhammer, Stuttgart, 2002

McKean J., *Crystal Palace, Paxton and Fox*, Phaidon, London, 1994

Piano R., Rogers R., *Du Plateau Beaubourg au Centre Georges Pompidou*, Le Moniteur, Paris, 1987

Saarinen E., *Il terminal dell'aeroporto internazionale Dulles*, Jaca Book, Milano, 1994

Vischer J., Hilbersheimer L., *Beton als Gestalter*, Julius Hofmann Stuttgart, 1928



Crédits photographiques

Les sources des photographies reproduites dans cet ouvrage sont récapitulées ci-après, les numéros indiquant la page et l'ordre d'apparition de l'image sur celle-ci. Lorsqu'un nom apparaît suivi d'une date, la référence complète se retrouve dans la bibliographie. Dans les autres cas la source ou l'ayant-droit est simplement indiqué.

A chaque fois que les ayant-droits ont pu être identifiés, une demande d'autorisation de reproduction leur a été adressée. Cependant quelques réponses nous font défaut au moment de procéder à la mise sous presse de cette première édition. Par ailleurs, certains ayant-droits n'ont pu être identifiés: ceux qui se reconnaîtraient sont invités à se faire connaître auprès des Presses polytechniques et universitaires romandes, lesquelles ne manqueront pas de les citer dans une prochaine édition. L'auteur et l'éditeur remercient tous ceux et celles qui leur ont accordé des autorisations, et tous les autres de leur compréhension.

Revue Acier, 1974 – 99/4a-c
Ackermann, 1988 – 151/3
D'Arcy, 1992 – 173/1a-d
Bill, 1949 – 72/3, 76/2b-c, 79/1a-b
Boaga, 1984 – 55/4
Boesiger, 1970 – 50/2a-d, 86/5, 98/3a
Brownlee, 1991 – 201/1
Buchanan, 1993 – 99/2a-b
Candela, 1994 – 103/2a-c, 104/2a-b, 104/3, 105/1a-b
Construire en Acier, Centrale Suisse de la Construction Métallique, Zurich, 2002 – 93/3a-b
L. Curran, Maecenas, http://wings.buffalo.edu/AandL/Maecenas – 186/1
De Bures, 1998 – 147/1a-b, 183/1a+c (Fonds Eiffel, ENPC, E. Monod)
Desideri, 1979 – 88/2, 185/2a-b
Deswarte, 1997 – 77/3, 183/1b
Dieste, 1998 – 86/2b
Dini, 1983 – 131/3
Dunster, 1996 – 72/2a
Eggen, 1996 – 85/1b (photo Arne Peter Eggen)
B. Elliott & H. Monroe – 53/3a-d
R. Favre, PPUR – 89/2
R. Feiner – 189/1 (photo Ralph Feiner)
Fernandez Ordonez, 1979 – 110/1, 177/1, 181/1a-b
A. Flammer – 200/3
Frei, 1966 – 51/3c
Golden Gate, 1987 – 43/3a-b
S. Guandalini – 55/2a-b, 202/1, 206/1
Guidot, 1998 – 152/4a, 185/1a-b (© Galerie Patrick Seguin)
Heinle et al, 1996 – 91/1a-b, 92/3a-c, 94/2, 96/1a-b
Heinle et al, 1990 – 171/4
Holgate, 1997 – 53/1a-b, 63/1, 100/4a-b, 100/5a-b, 105/2a-c
Holland Runner, http://hollandrunner.allset.nl/ – 3/1
Imbesi et al, 1995 – 174/3
INCO Spa, Milan – 182/1
Ishii, 1995 – 64/3
H. Isler – 102/2, 102/3, 102/4
Jesberg, 1996 – 70/1a-b (Hart, Poleni)
Kahn, 1997 – 104/4
C. Kerez – 195/2
J.-F. Klein – 215/2
Le Corbusier, 1960 – 98/3b
Leedy, 1983 – 88/3a-b
Leonhardt, 1982 – 176/2
Loyrette, 1985 – 121/2, 144/1a
Lyall, 2002 – 224/1 (photo Gran Smith)
Mark, 1990 – 88/1a-b, 109/1
McKean, 1994 – 133/1a-b
Mierop, 1995 – 142, 144/2b
A. Muttoni – XIV/1, 61/1, 78/2, 80/1, 81/3, 82/3, 82/4, 87/3, 97/3, 110/4a, 131/4, 137/6, 144/2a, 144/3c, 202/2, 218/2, 219/4, 224/2
Nervi, 1965 – 44/2a-b, 86/2a, 93/1a-c, 153/1a-b, 184/1b, 184/2, 184/3, 201/2, 224/3
Nervi, 1963 – 173/2, 184/1a+c, 188/1a-b, 196
Palladio, 1570 – 132/1
P. Pasinelli – 17/2a-b, 161/1, 214/1a-b, 214/2a-b, 223/2a-b
Pawley, 1999 – 215/3
Foto Pedroli, Chiasso – 113/2

Pfeiffer, 1991 – 208/2 (© 2004, ProLitteris, Zurich)

Pfeifer Seil- und Hebetechnik GmbH, D-87700 Memmingen – 54/1, 61/2

Picon, 1997 – 43/2b (photo Erza Stoller), 55/5, 60/1 (coll. Mnam-Cci, Ph. Baranger), 62/1a-b (photo Horst Berger), 64/1 (photo Horst Berger), 64/4a-c (Taiyo Kogyo Corp.), 68/2 (Severud Assoc.), 76/2a (Fonds Eiffel), 77/2 (Bibl. EPFZ), 89/3a-c (coll. EPAD, photo Jean Biaugeaud), 102/1 (coll. David Billington), 114/4 (AKG Photo), 137/2 (Deutsches Museum München), 146/3 (Deutsches Museum München), 153/2a-b (Fuller and Sadao PC), 184/4 (Fonds Prouvé)

Pizzetti, 1980 – 70/2a-b

S. Ranshaw - www.SailPhoto.co.uk & www.Ranshaw.co.uk – 215/1

Rice, 1995 – 52/1, 52/2

Robbin, 1996 – 61/3, 63/4, 64/2

Saarinen, 1994 – 43/2a

Schulze, 1989 – 132/2, 200/2a-b

J. Schwartz – 195/1

Studio Vacchini – 189/2

Suchov, 1990 – 72/1a-c (photos R. Graefe)

P. Thürlimann – 144/3b

Van Beek, 1987 – 85/3, 86/4

Villa, 1995 – 176/1a-b, 182/2,3

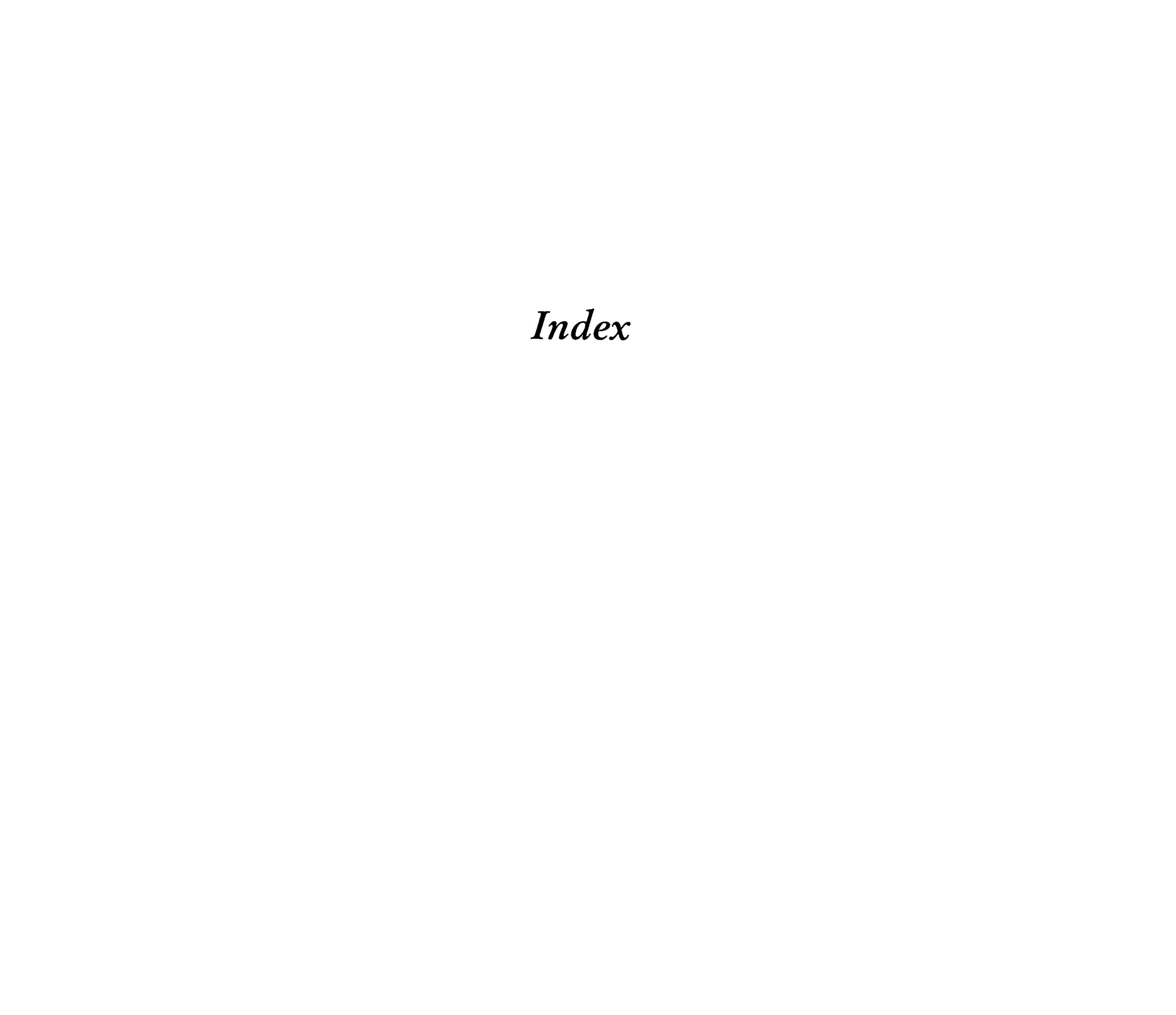
Vischer, 1928 – 86/3, 208/1

von der Mühl, 1981 – 54/3

Wachsmann, 1962 – 152/2a-b, 152/3a-b, 152/4b

W. & O. Wright, Library of Congress, Washington DC – 133/4

J.-L. Zanella – 213/1a-c



Index

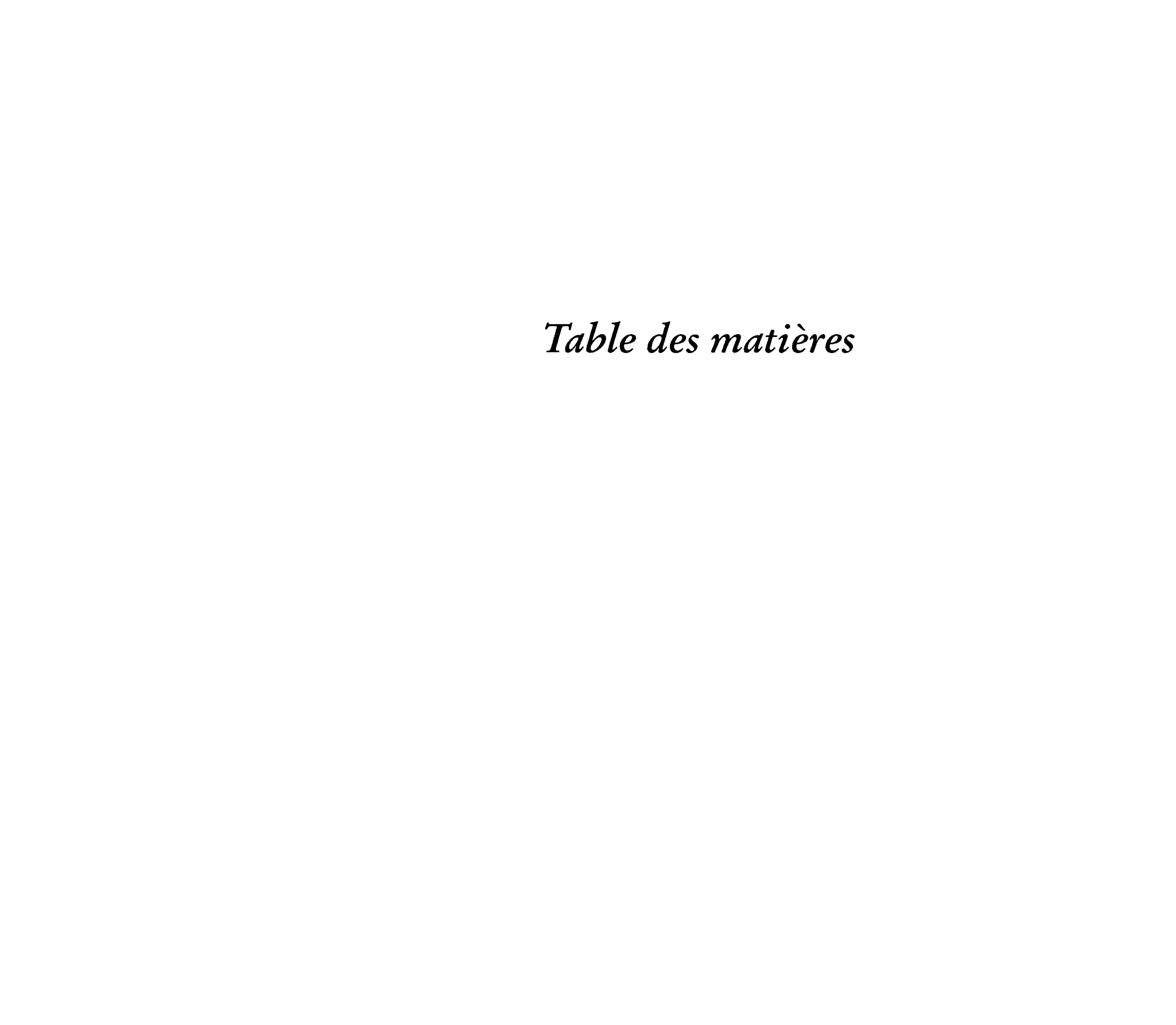
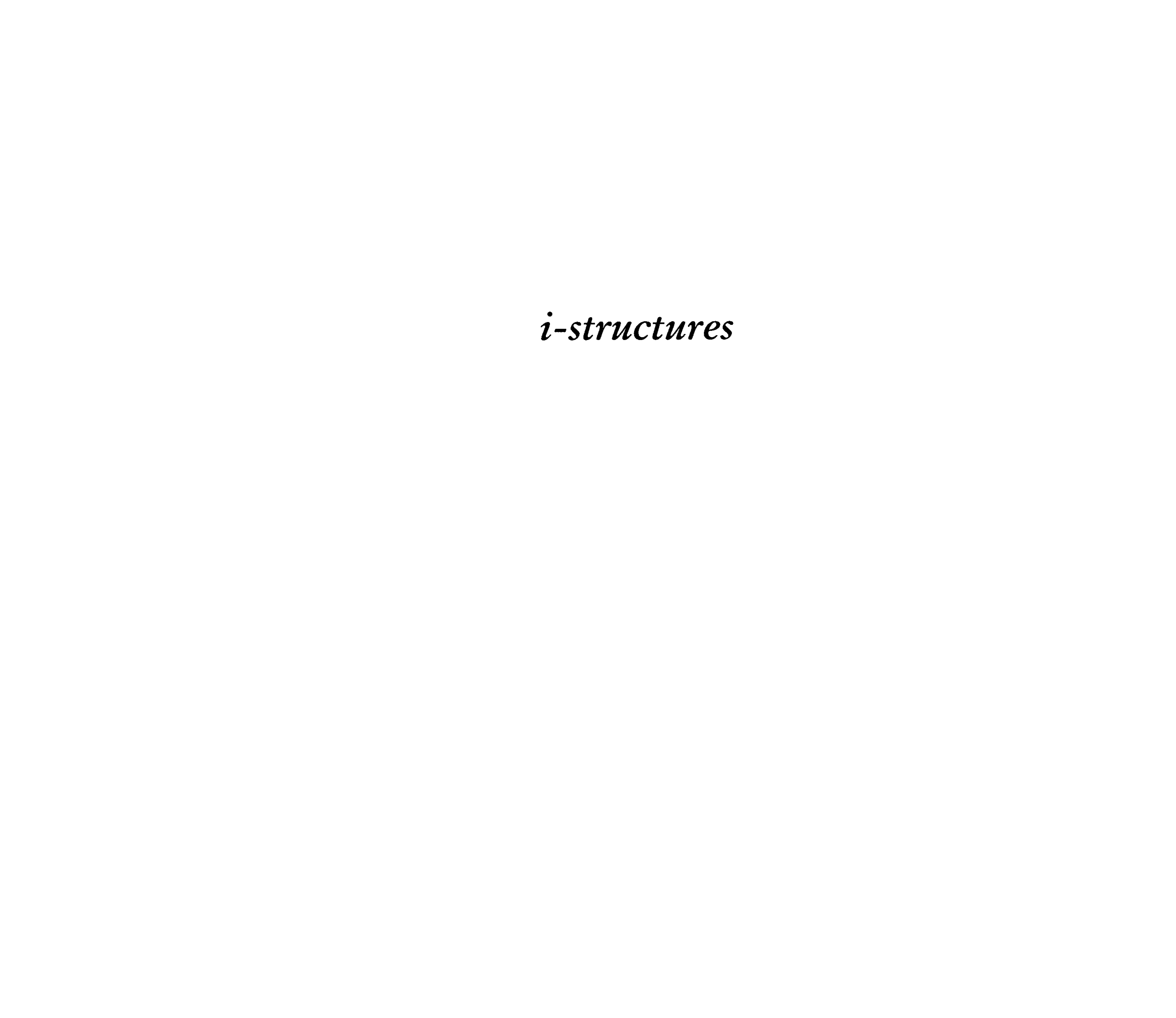
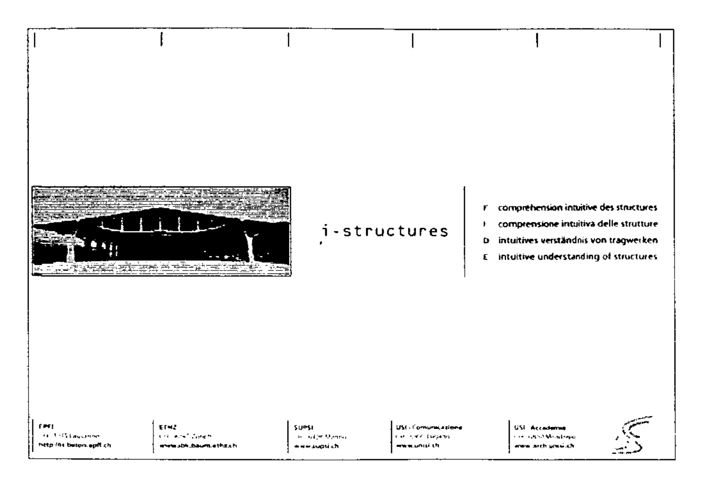


Table des matières



i-structures

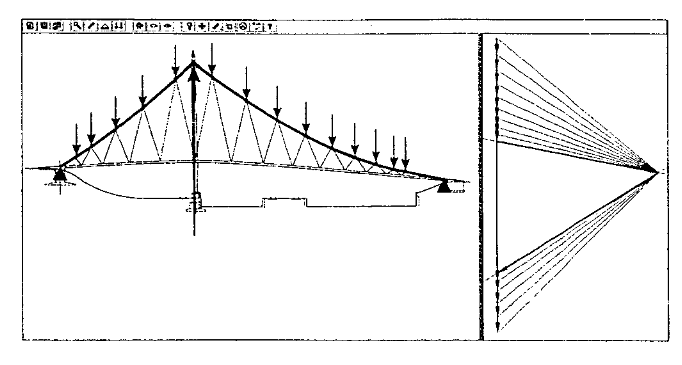


Page d'accueil: http://i-structures.epfl.ch

i-structures: un cours en ligne qui suit l'approche de ce livre

L'utilisation de l'approche suivie dans ce livre pour la formation des architectes et des ingénieurs est possible, et l'auteur en a fait l'expérience positive pendant plusieurs années. Le fait de proposer une approche rigoureuse basée sur la statique graphique permet aux étudiants de mieux assimiler les principes et les modes de fonctionnement des structures. Cependant, la construction systématique de polygones des forces et funiculaire conduit à une certaine répétition, et surtout prend un temps précieux lors de l'exposé des chapitres plus avancés.

Dans le cadre du Campus Virtuel Suisse (http://www.virtualcampus.ch), un cours en ligne a été développé sur la base de cet enseignement. La matière est structurée de la même manière, mais avec une subdivision plus fine pour permettre un avancement progressif et autonome des étudiants. Seuls les aspects essentiels sont traités, l'utilisateur étant renvoyé à ce livre pour les développements détaillés ou les sujets particuliers.



Applet i-Cremona: résolution graphique de la passerelle Rosenstein I, ing. J. Schlaich

Accès au cours en ligne

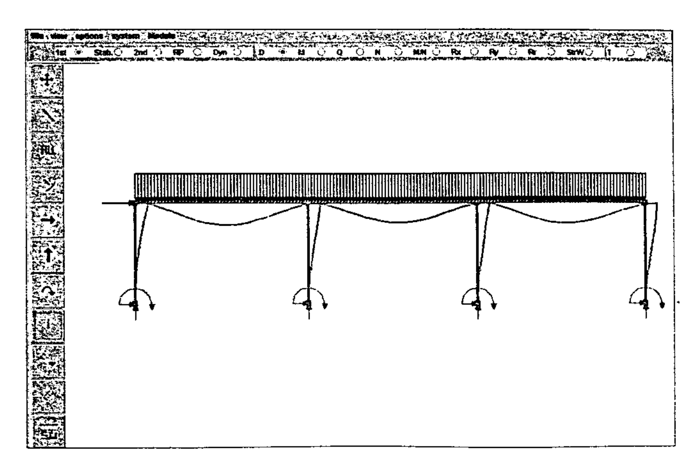
L'accès au cours i-structures est libre pour tout un chacun. La seule condition est de s'inscrire comme utilisateur lorsque, pour voir des sujets détaillés, le programme le propose.
Adresse du site: http://i-structures.epfl.ch.

Applets

Dans le but de profiter au maximum des avantages offerts par l'ordinateur, des programmes particuliers ont été développés pour supporter l'enseignement. Programmés sous la forme d'applets Java, ces programmes permettent de résoudre les cas les plus courants des problèmes exposés dans le cadre du cours.

i-Cremona

Le programme i-Cremona permet la résolution graphique de systèmes de forces selon la méthode de Cremona. L'interface subdivisée en deux panneaux permet de visualiser simultanément le polygone funiculaire et le diagramme des forces. La résolution de problèmes complexes est facilitée en travaillant sur une image d'arrière-plan de la structure étudiée.



Applet i-Cremona, modèle du Parthénon (voir p. 186), avec poids propre et charge horizontale. Les déformations montrées sont fortement amplifiées

i-static

Le programme i-static suit l'approche de la méthode des éléments finis, et permet de résoudre des problèmes de grande complexité, en donnant des résultats qui ne sont pas faciles à obtenir par les méthodes graphiques de ce livre: déformations des structures, résolution des systèmes hyperstatiques, etc.

Aurelio Muttoni

L'art des structures

Une introduction au fonctionnement des structures en architecture

Le thème de la structure constitue depuis toujours un aspect fondamental de la construction, intéressant aussi bien les ingénieurs que les architectes. Cet ouvrage consacré aux structures en architecture s'est donné pour objectif de contribuer à faciliter le dialogue entre ces deux domaines professionnels. *L'art des structures* offre un panorama complet sur les structures portantes et leur fonctionnement, en décrivant la manière dont les charges sont reprises et transmises jusqu'au sol. A cet effet, une approche intuitive est privilégiée: les bases de l'équilibre sont notamment expliquées en visualisant les efforts à l'intérieur d'ouvrages d'art historiques et modernes, à l'aide de simples outils graphiques.

L'ouvrage est organisé selon un parcours précis, débutant par une analyse des forces, des charges et des conditions nécessaires pour que les forces soient en équilibre. Il se poursuit avec une étude des concepts d'effort, de résistance, de déformation et de rigidité, permettant de comprendre comment une structure doit être dimensionnée. L'ouvrage analyse ensuite les structures sollicitées à la traction (câbles dans le plan, réseaux de câbles et membranes), celles sollicitées à la compression (colonnes, arcs, voûtes, coupoles et coques) et les structures combinées avec traction et compression (structures funiculaires, treillis, poutres, cadres, grilles de poutres, voiles et dalles). L'ouvrage se clôt par une étude du phénomène de l'instabilité des éléments comprimés et de ses conséquences sur la conception des structures porteuses.



ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Aurelio Muttoni est né en 1958 à Faido (Suisse). Il obtient un diplôme d'ingénieur civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich en 1982 et le titre de docteur en sciences techniques de la même école en 1989 avec une thèse sur l'application de la théorie de la plasticité dans le dimensionnement des structures en béton armé. Dès 1989, il est un des associés du Bureau d'ingénieurs Grignoli Muttoni Partner à Lugano où il collabore comme ingénieur conseil dans le cadre de concours et projets avec plusieurs architectes. Dès l'ouverture de l'«Accademia di Architettura» de l'Université de la Suisse italienne en octobre 1996, Aurelio Muttoni y exerce comme professeur de structures. En 2000, il est nommé professeur ordinaire de structures en béton armé à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL) où il dirige le laboratoire de construction en béton. Son enseignement et ses recherches portent sur la théorie et le dimensionnement des structures en béton armé ainsi que sur la conception et le calcul des ponts.

ISBN 2-88074-554-3

9 782880 745547 >